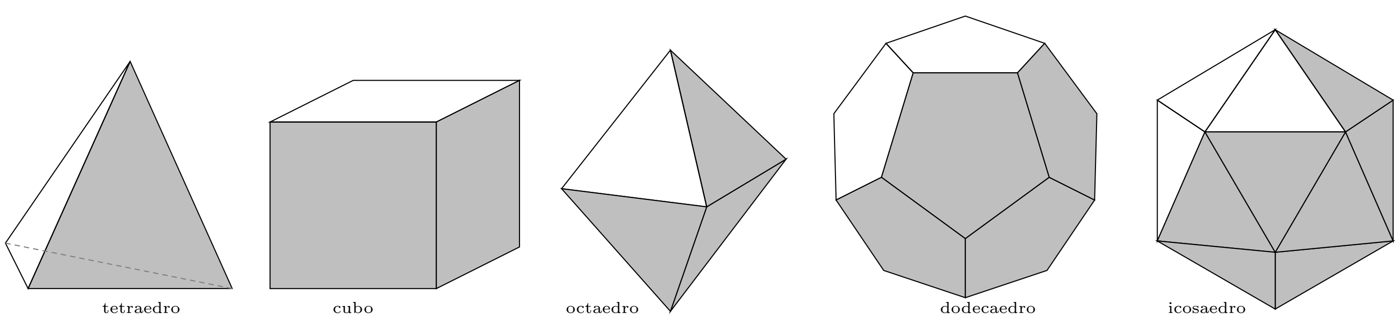
MATEMÁTICAS

MATEMÁTICAS
MATEMÁTICAS
MATEMÁTICAS

CIENCIAS SOCIALES I



24 de junio de 2011

Germán Ibáñez
http://www.otrapagina.com/matematicas

1. EL NUMERO REAL

1.1. Tipos de números

a. **Naturales:** $0, 1, 2, 3, 4, \dots$

b. **Enteros:** $-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots$

c. **Racionales:** Se pueden escribir de dos formas:

En forma **fraccionaria:** $-\frac{1}{4}, -\frac{328}{37}, \frac{3}{5}, \frac{29}{186}$

En forma **decimal:** $0'2, -0'827, -0'232323\dots$

Los números racionales escritos en forma decimal se caracterizan porque llega un momento en que las cifras de después de la coma se repiten : $\frac{1}{4} = 0'25000\dots, \frac{10}{3} = 3'333\dots, \frac{39}{7} = 5'571428571\dots$

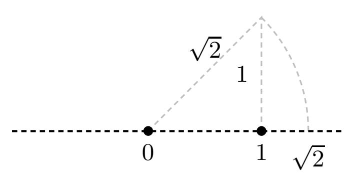
3 9 | 7
4 0 — 5'5714285...
5 0
1 0
3 0
2 0
6 0
4 0
5

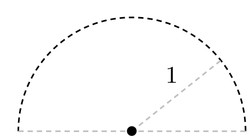
üna división acaba repitiéndo-se”

d. **Reales:** Son los racionales junto con los irracionales.

Los **irracionales** son aquellos cuya parte decimal no se repite:
$\sqrt{2} = 2'414213562\dots, \pi = 3'141592654\dots, \quad 1'01001000100001\dots$

Vemos que $\sqrt{2}$ tiene expresión decimal no periódica por lo tanto no es racional sino irracional. En la figura: hipotenusa $= \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$
Luego $\sqrt{2}$ se puede representar en la recta, por tanto en la recta hay más puntos que números racionales.





El número $\pi = 3'1415\dots$ Es la longitud de media circunferencia de radio uno.

Un número irracional no se puede escribir exactamente en forma decimal, aunque se pueden hallar tantas cifras decimales como se desee.

Otro irracional famoso es el número $\mathbf{e} = 2'71828\dots$

Es el número al que se acerca la expresión $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ cuando n es un número natural muy grande por ejemplo: $\left(1 + \frac{1}{100}\right)^{100} = 2'7048, \qquad \left(1 + \frac{1}{1000}\right)^{1000} = 2'7169$

1.2. Motivos para ampliar el conjunto de los números

El motivo por el que se va ampliando el conjunto de números es que hay operaciones que no se pueden hacer todas las veces:

- Se pasa de los naturales a los enteros para poder restar siempre
- Se pasa de los enteros a los racionales para poder dividir siempre

- Se pasa de los racionales a los reales para poder hacer raíces de números positivos siempre y poder expresar cualquier longitud con un número.

1.3. Los números reales

Los números racionales junto con los irracionales forman el conjunto de los números reales, se representan por R.

Propiedades de la suma y el producto de los números reales Lo que se dice para la suma vale para la resta y lo que se dice para el producto sirve para la división. Las operaciones suma (+) y producto (.) de números cumplen las siguientes propiedades:

Conmutativa: a + b = b + a ; a . b = b . a
es decir: Para la suma, el orden de los sumandos no altera la suma.
Para la multiplicación, el orden de los factores no altera el producto.

Asociativa: $a + (b + c) = (a + b) + c$; $a.(b.c) = (a.b).c$
es decir: para sumar varios números da igual el orden en que se hacen las sumas . Lo mismo se diría para el producto.
Ejemplo: $\dfrac{6\sqrt{27}}{3} = 2\sqrt{27}$
En el caso del producto también se dice: para multiplicar un producto por un número se multiplica uno solo de los factores.

Elemento neutro: el 0 para la suma y el 1 para el producto

Elemento simétrico del número a es: el opuesto $-a$ para la suma y el inverso $\dfrac{1}{a}$ si $a \neq 0$ para el producto.
Ejemplos: de 3 el opuesto es -3 y el inverso $\dfrac{1}{3}$
de $\dfrac{5}{7}$ el inverso es $\dfrac{1}{\frac{5}{7}} = \dfrac{7}{5}$

Distributiva del producto respecto de la suma: $a.(b + c) = a.b + a.c$
es decir: para multiplicar una suma por un número se multiplica cada uno de los sumandos.
Ejemplos:

- $3(7 + \sqrt{5}) = 21 + 3\sqrt{5}$
- Leyendo al revés es la operación de sacar factor común: $21 + 3\sqrt{5} = 3 \cdot 7 + 3\sqrt{5} = 3(7 + \sqrt{5})$
- No confundir con la asociativa del producto: $\dfrac{3\sqrt{10}}{3} = \sqrt{10}$
- Simplificar indicando la propiedad que se aplica: $\dfrac{6 + 12\sqrt{10}}{3} = 2 + 4\sqrt{10}$

  He dividido numerador y denominador por 3.

  Como el numerador es una suma he aplicado la propiedad distributiva, dividiendo cada sumando.

  Para dividir $12\sqrt{10}$ por 3 he aplicado la propiedad asociativa del producto, dividiendo solo el 12.

$3 + 4\sqrt{5} = 7\sqrt{5}$ ESTÁ MUY MAL

El conjunto R de los números reales con la suma, el producto y las propiedades que verifican se dice que tiene estructura de cuerpo conmutativo, esto escribe $(R, +, .)$ cuerpo conmutativo.

Además dados dos números reales siempre podemos decir cuál de los dos es más pequeño, es decir los números reales están ordenados por el orden $\leq \ldots$ menor o igual que ...

1.4. Aproximación por exceso y por defecto de un número real

Los números que tienen expresión decimal periódica $5'3333\ldots, 17'28979797\ldots$ y los números irracionales, como no se pueden dar todas sus cifra decimales se dan por aproximación:

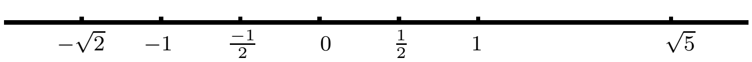
$$\sqrt{2} \approx \begin{cases} 1, 1'4, 1'41, 1'414, 1'4142, \ldots & \text{por defecto} \\ 2, 1'5, 1'42, 1'415, 1'4143, \ldots & \text{por exceso} \end{cases}$$

$$\frac{41}{33} = 1'2424\ldots \approx \begin{cases} 1, 1'2, 1'24, 1'242, 1'2424, \ldots & \text{por defecto} \\ 2, 1'3, 1'25, 1'243, 1'2425, \ldots & \text{por exceso} \end{cases}$$

1.5. Representación gráfica de los números reales en la recta

A cada número real le corresponde un punto y a cada punto un número real.

Los números reales llenan la recta:



1.6. Intervalos de números reales

Son trozos de la recta real. Por ejemplo: $\{x \in R / -1'4 \leq x \leq 3\}$, es el conjunto de números reales x, tales que $-1'4$ es menor o igual que x y x es menor o igual que 3, es decir el conjunto de números reales comprendidos entre $-1'4$ y 3, incluyendo $-1'4$ y 3.

intervalo abierto de extremos a, b es: $(a, b) = \{x \in R/a < x < b\}$

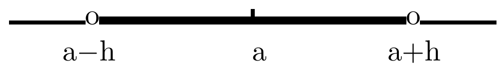
intervalo cerrado de extremos a, b es: $[a, b] = \{x \in R/a \leq x \leq b\}$

intervalo cerrado por a y abierto por b es $[a, b)$ es: $[a, b) = \{x \in R/a \leq x < b\}$

números más pequeños o iguales que a es: $(-\infty, a]$

números mayores que a es: (a, ∞)

Entorno simétrico de a de radio h es el intervalo abierto $(a-h, a+h)$, cualquier x del entorno se caracteriza porque la distancia de x a a es menor que h, es decir:
$(a-h, a+h) = \{x \in R / a-h < x < a+h\} = \{x \in R / |x-a| < h\}$



Ejemplo Expresar el conjunto de puntos de R que distan de -0'1 menos de 2.

1.7. Números factoriales

5.4.3 = factorial de 5 de orden 3.
1998.1997.1996.1995.1994.1993.1992.1991.1990.1989.1988 $= 1998^{(11}$ es el factorial de 1998 de orden 11.
$x(x-1)(x-2) = x^{(3}$. Factorial de x de orden 3.
Dado un número natural por ejemplo el 5, podemos considerar los productos 5.4; 5.4.3; etc.

Es decir productos en los que los factores se van obteniendo restando una unidad a los anteriores.

El número de factores se llama orden. Así en 4.3 es factorial de 4 de orden 2, se escribe $4^{(2}$.
Cuando llega hasta el 1 se escribe sólo con una admiración, ejemplo: $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4!$ y se llama simplemente número factorial, en el ejemplo factorial de 4.

En general sean m y h dos números naturales con $m \geq h$, factorial de m de orden h es el producto de h factores decrecientes a partir de m :

Ejemplo: $x^{(5} = x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$

Por convenio se define que factorial de cualquier número de orden 0 es 1 $m^{(0} = 1$;
y de orden 1 : $m^{(1} = m$.

Factorial de m será $m! = m(m-1)(m-2)(m-3)\ldots 3 \cdot 2 \cdot 1$

Propiedad $m^{(h} = \dfrac{m!}{(m-h)!}$

1.8. Números combinatorios

Sean m y h dos números naturales con $m \geq h$. Se define número combinatorio de base m de orden h como:

$$\binom{m}{h} = \frac{m^{(h}}{h!}$$

Ejemplos:
$\binom{7}{3} = \dfrac{7^{(3}}{3!} = \dfrac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$

$$\binom{x}{4} = \frac{x^{(4}}{4!} = \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$
$$\binom{x+3}{2} = \frac{(x+3)^{(2}}{2!} = \frac{(x+3)(x+2)}{2 \cdot 1}$$

Propiedades:

1. $\binom{m}{h} = \dfrac{m!}{h!.(m-h)!}$

   Ejemplo: $\binom{7}{3} = \dfrac{7^{(3}}{3!} = \dfrac{7{,}6{,}5}{3{,}2{,}1} \quad \dfrac{7!}{4!{,}3!} = \dfrac{7{,}6{,}5{,}4{,}3{,}2{,}1}{4{,}3{,}2{,}1.\ 3{,}2{,}1} = \dfrac{7{,}6{,}5}{3{,}2{,}1}$

2. $\binom{m}{0} = 1 \quad \binom{m}{m} = 1$

3. Triángulo de Tartaglia

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & \binom{0}{0} & & & & & & \\
 & & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & & \\
 & & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & & \\
 & & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & & \\
 & & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & & \\
 & \binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} & \\
\binom{6}{0} & & \binom{6}{1} & & \binom{6}{2} & & \binom{6}{3} & & \binom{6}{4} & & \binom{6}{5} & & \binom{6}{6}
\end{array}$$

   que da los resultados:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}$$

   Observamos que:

   a) la suma de dos números combinatorios seguidos nos da el de abajo:
   $\binom{m}{h} + \binom{m}{h+1} = \binom{m+1}{h+1}$

   b) los números equidistantes de los extremos son iguales: $\binom{m}{h} = \binom{m}{m-h}$

Problemas de Número Real

1. Efectuar por mínimo común denominador simplificando el resultado:

   a) $\frac{4}{3} - \frac{2}{25} + \frac{7}{5} =$

   b) $1 + \frac{1}{10} - \frac{10}{100} + \frac{1}{10000} =$

   c) $\frac{5}{4} - \frac{3}{10} + \frac{9}{6} - \frac{10}{25} + 4 =$

   d) $1 - \dfrac{\frac{1}{5}+\frac{3}{4}}{\frac{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}}{5} - 2} =$

   Solución: a) 199/75, b) 10001/10000, c) 121/20, d) 54/35

2. Extraer factor común

   a) $8a + 5ab - 3ac - 2da$

   b) $3a + 9ab - 6ad + 12ca$

   c) $14\sqrt{2} - 21\sqrt{3} + 28\sqrt{5} + 49\sqrt{7}$

   d) $x^3y^3 + 2x^2y^4 - 5x^3y^2$

   e) $15x^2 - 3x + 6x^3 - 12x^7$

   Solución: a) $a(8+5b-3c-2d)$, b) $3a(1+3b-2d+4c)$, c) $7(2\sqrt{2}-3\sqrt{3}+4\sqrt{5}+7\sqrt{7})$, d) $x^2y^2(xy+2y^2-5x)$, e) $3x(5x-1+2x^2-4x^6)$

3. Efectuar $1 + \dfrac{1}{3+\frac{1}{2+\frac{1}{3}}} =$

   Solución: 31/24

4. Efectuar $\dfrac{\left(\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\right)\frac{2}{3}}{\frac{3}{4}\left(1+\frac{2}{5}\right)} =$

   Solución: 44/63

5. Sacar factor común $x(x-y) - (x-y)^2$

   Solución: $(x-y)y$

6. Representar en una recta

   $-8/3;\quad -4'7;\quad -0'9;\quad \sqrt{2};\quad 2\sqrt{3}$

7. Representar y dar tres elementos del conjunto $\{x \in R / -1'4 \le x \le 3\}$

8. Aproximar por defecto y por exceso: a) $\sqrt{19}$ b) $3-2\sqrt{2}$; c) $-\sqrt{3}$. Representar gráficamente hasta las décimas.

   Solución: b) $\left.\begin{array}{l} 0, 0'1, 0'17, 0'171, 0'1715 \\ 1, 0'2, 0'18, 0'172, 0'1716 \end{array}\right\} 3-2\sqrt{2} = 0'171572$

   c) $\left.\begin{array}{l} -1, -1'7, -1'73, -1'732 \\ -2, -1'8, -1'74, , -1'733 \end{array}\right\} -\sqrt{3} = -1'73205$

9. Escribir y dibujar los intervalos $(3,6)$; $[-1'3, \sqrt{2}]$. Decir de qué número es entorno el intervalo $[3,7]$.

10. Decir qué propiedad se aplica en cada caso:

    a) $(-5),9 = 9.(-5)$

    b) $3(2-6x) = 6 - 18x$

    c) $[3.(-5)].[14.(-4)] = 3.(-70).(-4)$

    d) $\dfrac{10+x}{4} = \dfrac{5+x}{2}$

    e) $\dfrac{4+6}{4} = \dfrac{2+3}{2}$

11. Dibujar 5 números en el entorno de centro $-1'9$ y radio $0'2$.

12. Dibujar 5 números en el entorno de centro $0'1$ y radio $0'25$.

13. Efectuar

    a) $5^{(4} =$

    b) $20^{(3} =$

    c) $x^{(5} =$

    d) $28^{(x} =$

    Solución: a) 120, b) 6840, c) $x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$, d) $28\cdot 27\cdot 26\ldots(28-x+1)$

14. Efectuar

    $$\frac{(2x-1)! + (2x-3)!}{(2x)!}$$

    Solución: $\dfrac{(2x-1)(2x-2)+1}{2x(2x-1)(2x-2)}$

15. Efectuar

    a) $\binom{7}{3} =$

    b) $\binom{30}{6} =$

    c) $\binom{x-1}{3} =$

    d) $\binom{2x-1}{h-2} =$

    Solución: a) 35, b) 593775, c) $\dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)}{6}$, d) $\dfrac{(2x-1)(2x-2)(2x-3)\ldots(2x-h+2)}{(h-2)(h-3)\ldots 3\cdot 2\cdot 1}$

16. Simplificar $\binom{x+1}{5} : \binom{x-1}{4} =$

    Solución: $\dfrac{x^2+x}{5x-20}$

17. Resolver $\binom{x+1}{2} + \binom{x}{2} + \binom{x-1}{2} = 136$

    Solución: $-9, 10$

18. Resolver $\binom{x}{3} = \binom{x}{2}$

    Solución: 5

19. Resolver $\binom{3}{1} + \binom{x}{2} = \binom{x+1}{2}$

    Solución: 3

2. POTENCIAS Y RADICALES

2.1. Potencias de números reales

Dado un número real a y un entero positivo n se define potencia de base a y exponente n como el producto de a por sí mismo n veces.

$$a^n = a \cdots^{(n)} \cdots a$$
$$a^1 = a$$
$$a^0 = 1$$

Se define potencia de base a y exponente negativo $-n$, como 1 partido por la misma potencia positiva, es decir: $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

2.2. Propiedades de las potencias

1. $(a.b)^x = a^x.b^x$

   Para elevar un producto a una potencia se elevan cada uno de los factores.

2. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$

   Para elevar un cociente a una potencia, se eleva el numerador y el denominador.

3. $(a^x)^y = a^{x.y}$ Para elevar una potencia a otra potencia se multiplican los exponentes.

4. $a^x.a^y = a^{x+y}$ Para multiplicar dos potencias de igual base se suman los exponentes.

5. $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ Para dividir dos potencias de la misma base se restan los exponentes.

Observaciones: 1) con sumas o restas de potencias la unica operacion posible es sacar factor común. Por ese motivo: $3^2 + 5^2 = (3+5)^2 = 8^2$ ESTA MUY MAL.

2) al elevar una fracción a una potencia negativa resulta: $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-x} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^x$

Notación científica: Consiste en expresar un número como el producto de un número con una cifra entera multiplicado por una potencia de 10:

Ejemplo: Efectuar y expresar en notación científica:

$$\frac{3 \cdot 10^{-28} \cdot 5 \cdot 10^{15}}{2 \cdot 10^{17} - 5'03 \cdot 10^{15}} = \frac{3 \cdot 10^{-28} \cdot 5 \cdot 10^{15}}{200 \cdot 10^{15} - 5'03 \cdot 10^{15}} = \frac{15 \cdot 10^{-13}}{194'97 \cdot 10^{15}} \approx \frac{0'0769 \cdot 10^{-13}}{10^{15}} =$$
$$0'0769 \cdot 10^{-28} = 7'69 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-28} = 7'69 \cdot 10^{-30}$$

2.3. Igualdades notables

1. $(-a)^2 = a^2$. Ejemplo: $(-x+3)^2 = (x-3)^2$

2. $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$. El cuadrado de una suma es igual al cuadrado del primero, más el cuadrado del segundo, más el doble del primero por el segundo.

   Ejemplo: $[(x+y)+2z]^2 = (x+y)^2 + (2z)^2 + 4z(x+y)$

3. $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$. El cuadrado de una resta es igual al cuadrado del primero, más el cuadrado del segundo, menos el doble del primero por el segundo.

   Ejemplo: $(2x - y^2)^2 = 4x^2 + y^4 - 4xy^2$

4. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$. Suma por diferencia es igual a la diferencia de los cuadrados.

   Ejemplo: $(x^4 - 1) = (x^2+1)(x^2-1)$

2.4. Radicales

Son del tipo $\sqrt{3}$, $\sqrt[5]{17}$, $\sqrt[3]{64}$.

Dado un número real a y un número natural n distinto de 0 , se dice que el número b es raíz de índice n del número a cuando la potencia de b de exponente n es a. Es decir:

$$\sqrt[n]{a} = b \text{ cuando } b^n = a$$

Observaciones: 1) Se dan los siguientes nombres en $\sqrt[n]{a} = b$
a = radicando, b =raíz, n = índice ($n=2$ no se pone), $\sqrt[n]{a}$ = radical

2)

$$\text{RADICANDO POSITIVO} \begin{cases} \text{índice par} & \longrightarrow \quad \text{2 raíces; ejemplo: } \sqrt{4} = \pm 2 \\ \text{índice impar} & \longrightarrow \quad \text{1 raíz; ejemplo: } \sqrt[3]{125} = 5 \end{cases}$$

$$\text{RADICANDO NEGATIVO} \begin{cases} \text{índice par} & \longrightarrow \quad \text{ninguna raíz real; ejemplo: } \sqrt{-4} \\ \text{índice impar} & \longrightarrow \quad \text{1 raíz; ejemplo: } \sqrt[3]{-8} = -2 \end{cases}$$

2.5. Propiedades de los radicales

Se deducen de las propiedades de las potencias:

1. Raíz de un producto es el producto de las raíces $\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$
2. Raíz de un cociente es igual al cociente de las raíces $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
3. Raíz de una raíz es la raíz de índice el producto de los índices. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n.m]{a}$
4. Raíz de una potencia es igual a la potencia de la raíz $\sqrt[n]{a^p} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^p$, (salvo signo)
5. Una raíz no varía si se multiplica o se divide el índice y el exponente por un mismo número es decir: $\sqrt[n]{a^p} = \sqrt[n.h]{a^{p.h}}$

Observación: con raíces de sumas o sumas de raíces no hay nada que hacer.
Ejemplo: $\sqrt{a^2+4} = a+2$ MUY MAL

2.6. Cálculo con radicales

Extraer factores fuera de la raíz: se divide el exponente por el índice y dentro queda el factor elevado al resto. Saliendo fuera del radical el factor elevado al cociente. Ejemplos:

- $\sqrt{3x^2} = \sqrt{3}.x$
- $\dfrac{\sqrt{4x}}{2} = \dfrac{2\sqrt{x}}{2} = \sqrt{x}$

Introducir factores dentro del radical: se multiplica el exponente por el índice. Ejemplos:

- $\dfrac{\sqrt{3}}{3} = \sqrt{\dfrac{3}{3^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$
- $x\sqrt{\dfrac{5}{x}} = \sqrt{\dfrac{5x^2}{x}} = \sqrt{5x}$

Operaciones con radicales semejantes: Se extraen factores y se saca factor común.Ejemplo:

$$\sqrt{27} - \sqrt{75} - \sqrt{300} = \sqrt{3^3} - \sqrt{5^2 3} - \sqrt{10^2 3} = 3\sqrt{3} - 5\sqrt{3} - 10\sqrt{3} = -12\sqrt{3}$$

Racionalizar Racionalizar es quitar raíces del denominador:

1. Denominador sin sumas de raíces. Para racionalizar en este caso se multiplica el numerador y el denominador por el radical adecuado. Ejemplos:
   - $\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
   - $\dfrac{a}{3\sqrt{5}} = \dfrac{a\sqrt{5}}{3\sqrt{5}\sqrt{5}} = \dfrac{a\sqrt{5}}{3 \cdot 5} = \dfrac{a\sqrt{5}}{15}$
2. Denominador con sumas o restas de raíces: Se multiplica numerador y denominador por el conjugado, (solo sirve para raíces cuadradas). Ejemplos:
   - $\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2} - \sqrt{5}} = \dfrac{3\sqrt{2}(\sqrt{2} + \sqrt{5})}{(\sqrt{2} - \sqrt{5})(\sqrt{2} + \sqrt{5})} = \dfrac{3\sqrt{2}(\sqrt{2} + \sqrt{5})}{(\sqrt{2})^2 - (\sqrt{5})^2} = \dfrac{6 + 3\sqrt{10}}{2 - 5} = \dfrac{6 + 3\sqrt{10}}{-3} = -2 - \sqrt{10}$
   - $\dfrac{3\sqrt{3}}{x + \sqrt{3}} = \dfrac{3\sqrt{3}(x - \sqrt{3})}{(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})} = \dfrac{3\sqrt{3}x - 9}{x^2 - 3}$

2.7. Potencias de exponente fraccionario

Definimos potencias de base a y exponente $\dfrac{p}{q}$ como la raíz de índice el denominador de la potencia de exponente el numerador:

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$$

Si el exponente es negativo: $a^{-\frac{p}{q}} = \dfrac{1}{a^{\frac{p}{q}}}$
Las propiedades son las mismas de otras potencias.

Ejemplo:
Simplificar: $\dfrac{8^{\frac{2}{3}} 6^{\frac{3}{5}}}{2^{\frac{-5}{3}} 12^{\frac{4}{8}}} = \dfrac{(2^3)^{\frac{2}{3}}(3{,}2)^{\frac{3}{5}}}{2^{\frac{-5}{3}}(2^2 \cdot 3)^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{2^2 3^{\frac{3}{5}} 2^{\frac{3}{5}}}{2^{\frac{-5}{3}} 2 \cdot 3^{\frac{1}{2}}} = 2^{2+\frac{3}{5}+\frac{5}{3}-1} \cdot 3^{\frac{3}{5}-\frac{1}{2}} = 2^{\frac{49}{15}} \cdot 3^{\frac{1}{10}}$

Problemas de potencias y radicales

1. Calcular las potencias:

   $(-3)^2; \quad -3^2; \quad (-0'15)^2; \quad 0'01^4; \quad (-2/3)^3$

   Solución: $9, -9, 0'0225, 0'00000001, -8/27$

2. Reducir a una sola potencia

   a) $(-1/2)^2.(1/2)^5.(1/2)^3.(1/2) =$

   b) $\{[(-0'1)^2]^3\}^3 =$

   c) $[(-1/2)^2]^5 =$

   Solución: a) $(1/2)^{11}$, b) $(0'1)^{18}$, c) $0'398$

3. Efectuar $(-1/2)^2 + (3/2)^3 - (5/3)^2 =$

   Solución: $61/72$

4. Calcular

   a) $(-1/2)^{-1} =$

   b) $[(16/5) - 1'2]^{-3} =$

   c) $\left(\dfrac{1}{5} - 2\right)^{-2} =$

   Solución: a) -2, b) $1/8$, c) $25/81$

5. Simplificar

   a) $\dfrac{3024}{4200}$

   b) $\dfrac{441}{1350}$

   c) $\dfrac{1331}{165}$

   Solución: a) $18/25$, b) $49/150$, c) $121/15$

6. Simplificar

   a) $\dfrac{a^2 - 9}{2a - 6}$

   b) $\dfrac{14a^2 + 3}{7a}$

   Solución: a) $(a+3)/2$, b)no se puede,

7. Simplificar

   $\dfrac{(p^2 - 4)^{-1}}{(p^2 - 2p)^{-1}}$

   Solución: $p/(p+2)$

8. Efectuar:

   a) $1'2 \cdot 10^{15} \cdot 2 \cdot 10^{-8}$

   b) $\dfrac{4'2 \cdot 10^{13} + 2 \cdot 10^{19}}{2 \cdot 10^{-8}}$

   c) $\dfrac{3'2 \cdot 10^7 - 4 \cdot 10^8}{2 \cdot 10^8 + 10^5}$

   Solución: a) $2'4{\cdot}10^7$, b) $1'0000021{\cdot}10^{27}$, c) $-1{\cdot}83908$

9. Efectuar

   $\sqrt{1 + \sqrt{6 + \sqrt{5 + \sqrt{16}}}}$

   Solución: 2

10. Extraer factores del radical

    a) $\sqrt{54}$

    b) $\sqrt{\dfrac{27x^{10}}{y^8}}$

11. Introducir factores dentro del radical

    a) $x\sqrt{\dfrac{1}{x}}$

    b) $\dfrac{a-b}{a+b}\sqrt{\dfrac{a+b}{a-b}}$

    Solución: a) $\sqrt{x}$, b) $\sqrt{\dfrac{(a-b)}{(a+b)}}$

12. Efectuar $2a\sqrt{3} - \sqrt{27a^2} + 2\sqrt{12}$

    Solución: $(-a+4)\sqrt{3}$

13. Efectuar $4\sqrt{12} - \dfrac{3}{2}\sqrt{48} + \dfrac{2}{3}\sqrt{27} + \dfrac{3}{5}\sqrt{75}$

    Solución: $7\sqrt{3}$

14. Racionalizar $\dfrac{1}{2 - 2\sqrt{2}}$

    Solución: $\dfrac{-1-\sqrt{2}}{2}$

15. Simplificar

    $\dfrac{12^{\frac{8}{3}}15^{\frac{-7}{6}}}{75^{\frac{19}{12}}}$

    Solución: $2^{\frac{16}{3}}3^{\frac{-1}{12}}5^{\frac{-13}{3}}$

16. Simplificar si es posible:

    a) $\dfrac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5} - 3}$

    b) $\dfrac{3 - \sqrt{2}}{6\sqrt{2} + 3}$

    c) $\dfrac{3 - 5\sqrt{2}}{5\sqrt{3}}$

3. ECUACIONES Y SISTEMAS DE ECUACIONES

3.1. Ecuación

Una **ecuación** es una igualdad con alguna incógnita que se representa por una letra. Resolver una ecuación es encontrar el valor de la incógnita que hace que se cumpla la igualdad.

Para **resolver** una ecuación se opera hasta dejar sola la incógnita x

Solución de una ecuación es un número que al sustituir por él la incógnita x cumple la igualdad.

3.2. Propiedades de las igualdades y aplicación a la resolución de ecuaciones

1. Si se suma o resta un mismo número a los dos miembros de una igualdad la igualdad se conserva.

   Aplicación a ecuaciones: Se aplica para la transposición de términos: un término que está sumando pasa restando y viceversa.

   Ejemplos:

$3+x=5$	$3x+2=5-2x$
$(-3+3+x=5-3)$ no se suele poner	$3x+2x=5-3$
$x=5-3$	$5x=3$

2. Si se multiplican o dividen los dos miembros de una igualdad por un mismo número, la igualdad se conserva.

   Aplicación a ecuaciones: 1^a Aplicación : quitar denominadores; se multiplica todo por el mínimo común múltiplo de los denominadores. Se va multiplicando cada numerador por lo que le falta a su denominador para ser el denominador común.

   Ejemplo: $\dfrac{2x-1}{3}+\dfrac{3x}{5}=1; \quad \dfrac{5(2x-1)+3{,}3x}{15}=\dfrac{15}{15}; \quad 5(2x-1)+9x=15$

   2^a Aplicación: despejar la x pasando el coeficiente con su signo al otro miembro.

   Ejemplos:

$-5x=3$	$\dfrac{x}{3}=7$
$x=-\dfrac{3}{5}$	$x=21$

Observaciones:

1. Si al resolver una ecuación llegamos a algo del tipo: $3x=3x+2$, quedaría $0=2$, o sea, no hay solución.

2. Si al resolver una ecuación llegamos a algo del tipo: $2(5x-3)=10x-6$, o sea $10x-6=10x-6$ quedaría $0x=0$, entonces cualquier número es solución, se pierden de vista las soluciones si se simplifica.

3. Si en una ecuación la incógnita está en algún denominador o debajo de raíces, hay que comprobar las soluciones.

   Ejemplo: $\dfrac{x^2-1}{x+1}=0$

Para anular una fracción se anula el numerador

$x^2-1=0, \quad x^2=1, \quad x=\pm 1$ para 1: $\frac{1-1}{1+1}=0$ si es solución; para -1: $\frac{1-1}{-1+1}=\frac{0}{0}$ no es solución

Es decir, no sirven soluciones que anulen denominadores.

Ejemplo: $\sqrt{x^2-16}=3$

$\sqrt{(x^2-16)^2}=3^2; \quad x^2-16=9; \quad x^2=25; \quad x=\pm 5$ las dos son soluciones

Ejemplo: Resolver la ecuación $2x+\frac{5}{3}=\frac{3x-2}{7}$ indicando las propiedades que se aplican.

Para quitar denominadores multiplicamos los dos miembros por un mismo número, el m.c.m. de los denominadores que es 21:
$$21\left(2x+\frac{5}{3}\right)=21\cdot\frac{3x-2}{7}$$

Como el primer miembro es una suma aplicamos la distributiva y multiplicamos cada sumando:
$$21\cdot 2x+21\cdot\frac{5}{3}=21\cdot\frac{3x-2}{7}$$

Ahora para multiplicar cada término aplicamos la asociativa multiplicando un solo factor y la conmutativa alterando el orden de los factores para que el resultado quede como nos interesa:
$$(21\cdot 2)x+\frac{21}{3}\cdot 5=\frac{21}{7}(3x-2)$$
$$42x+7\cdot 5=3(3x-2)$$

Aplicamos la distributiva para quitar el paréntesis del segundo miembro:
$$42x+7\cdot 5=3\cdot 3x-3\cdot 2$$

Aplicamos la asociativa para multiplicar $3\cdot 3x$: multiplicando un solo factor:
$$42x+35=9x-6$$

Para juntar las x en el primer miembro y el resto en el segundo miembro, trasponer términos, restamos a los dos miembros el mismo número: $9x$ y 35, es decir:
$$42x+35-9x-35=9x-6-9x-35$$

Efectuamos las operaciones aplicando la conmutativa de la suma:
$$33x=-41$$

Para aislar la x solo falta pasar su coeficiente, esto se hace dividiendo los dos miembros por el coeficiente de x:
$$\frac{33x}{33}=\frac{-41}{33}$$

Aplicamos la asociativa para efectuar la división que figura en el primer miembro:
$$x=\frac{-41}{33}$$

3.3. Ecuación de segundo grado

La expresión general de una ecuación de segundo grado es $ax^2+bx+c=0$

Cuando alguno de los coeficientes es igual a 0 se llama **ecuación incompleta** de segundo grado.

Hay que tener en cuenta que no existen raíces cuadradas de números negativos.

I) no hay término en x : O sea $b=0$, es de la forma $ax^2+c=0$. se resuelve despejando x.

Ejemplos:

$2x^2-7=0 \; 2x^2=7$

$x^2=\frac{7}{2} \quad x=\pm\sqrt{\frac{7}{2}} \quad \begin{cases} x_1=\sqrt{\frac{7}{2}}=1'87 \\ x_2=-\sqrt{\frac{7}{2}}=-1'87 \end{cases}$

$3x^2+5=0$

$3x^2=-5$

$x^2=\frac{-5}{3} \quad x=\pm\sqrt{\frac{-5}{3}}$ que no da solución real

II) no hay término independiente: O sea $c = 0$, $ax^2 + bx = 0$. Se saca factor común y se aplica que para que un producto se anule ha de anularse uno de los factores.

Ejemplo: $3x^2 + 2x = 0$;

$$x(3x+2) = 0 \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 : \quad 3x+2=0 \quad 3x=-2 \quad x_2 = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

III) Caso general. Ecuación completa: $ax^2 + bx + c = 0$

Se aplica la fórmula: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Ejemplo:

$3x^2 - 10x + 4 = 0$;

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 4 \cdot 3 \cdot 4}}{6} = \frac{10 \pm \sqrt{100-48}}{6} = \frac{10 \pm \sqrt{52}}{6} \quad \begin{cases} x_1 = \frac{10+\sqrt{52}}{6} = 2'86 \\ x_2 = \frac{10-\sqrt{52}}{6} = 0'46 \end{cases}$$

Observaciones:

- Si el coeficiente de x^2 es negativo suele compensar cambiar el signo a todo:

  $-3x^2 + 5x + 8 = 0$

  $$3x^2 - 5x - 8 = 0; \qquad x = \frac{5 \pm \sqrt{25+96}}{6} = \frac{5 \pm \sqrt{121}}{6} = \frac{5 \pm 11}{6} \quad \begin{cases} x_1 = \frac{16}{6} = \frac{8}{3} \\ x_2 = \frac{-6}{6} = -1 \end{cases}$$

- Si la ecuación está descompuesta en factores es más cómodo ir anulando factores:

  $$(8x-5)(3+x) = 0 \qquad \begin{cases} 8x - 5 = 0; \quad x_1 = \frac{5}{8} \\ 3 + x = 0; \quad x_2 = -3 \end{cases}$$

3.4. Ecuaciones bicuadradas

Ejemplo:

1. $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$

   Se hace el cambio de variable $y = x^2$; resulta $y^2 = x^4$; queda:

   $$y^2 - 5y - 36 = 0; \quad y = \frac{5 \pm \sqrt{25+144}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{169}}{2} = \frac{5 \pm 13}{2} = \begin{cases} y_1 = 9 \\ y_2 = -4 \end{cases}$$

   $$y_1 = 9; \quad x^2 = 9; \quad x = \pm\sqrt{9} = \pm 3 \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -3 \end{cases}$$

   $y_1 = -4$; $\quad x^2 = -4$; $\quad x = \pm\sqrt{-4}$; No da solución real

2. $2x^4 - 3x^2 - 10 = 0$

   $$2y^2 - 3y - 10 = 0 \quad y = \frac{3 \pm \sqrt{89}}{4} \quad \begin{cases} x^2 = \frac{3+\sqrt{89}}{4} & \begin{cases} x_1 = \sqrt{\frac{3+\sqrt{89}}{4}} \\ x_2 = -\sqrt{\frac{3+\sqrt{89}}{4}} \end{cases} \\ x^2 = \frac{3-\sqrt{89}}{4} & \text{no da soluciones reales} \end{cases}$$

3.5. Ecuaciones irracionales

Se caracterizan porque la incógnita está debajo de una raíz.

Se resuelven aislando sucesivamente los radicales y elevando al cuadrado. Hay que comprobar las soluciones.

Ejemplo: $18-\sqrt{x+10}=2$

$\sqrt{x+10}=16$ elevando al cuadrado $\left(\sqrt{x+10}\right)^2=16^2; \quad x+10=256; \quad x=246$

comprobamos: $18-\sqrt{246+10}=2$ Sirve la solución

3.6. Métodos de resolución de sistemas de ecuaciones

Un sistema de ecuaciones son varias ecuaciones que relacionan a las mismas incógnitas.

Se llama **solución del sistema** a los números que cumplen las ecuaciones es decir que al sustituir en el sistema verifican todas las ecuaciones.

- **Método de sustitución**

  Se despeja una incógnita en una ecuación y se sustituye en las otras:

  $$\left\{\begin{array}{l} 2x+3y=9 \\ x-5y=-10 \end{array}\right. \qquad x=5y-10 \qquad \begin{array}{l} 2(5y-10)+3y=9 \\ 10y-20+3y=9 \\ 13y=29 \end{array} \qquad y=\frac{29}{13} \qquad x=5\frac{29}{13}-10=\frac{15}{13}$$

- **Método de reducción**

  Se multiplican las ecuaciones por números convenientes para que al sumar desaparezca alguna incógnita:

  Ejemplos:

  1. $\left\{\begin{array}{l} 2x+3y=9 \\ x-5y=-10 \end{array}\right.$ si multiplicamos por -2 abajo y sumamos desaparecerá la x $\left\{\begin{array}{l} 2x+3y=9 \\ \underline{-2x+10y=20} \end{array}\right.$ $\quad 13y=29$

     $y=\frac{29}{13}$, sustituyendo en la 2^a obtenemos la x: $x=\frac{15}{13}$

  2. $\left\{\begin{array}{l} 3x-8y=2 \\ 5x-9y=6 \end{array}\right.$ multiplicamos la de abajo por el coeficiente de x de la primera y le sumamos la primera multiplicada por el de la segunda cambiado de signo, es decir: $2^a\cdot 3+1^a\cdot(-5)$ $\quad \begin{array}{r} 15x-27y=18 \\ \underline{-15x+40y=-10} \\ /\quad 13y=8 \end{array}$

     sustituyendo por ejemplo en la primera $3x-8\frac{8}{13}=2; \quad 3x-\frac{64}{13}=2; \quad 3x=2+\frac{64}{13}=\frac{26+64}{13} \quad x=\frac{90}{13}$

  3. Hallar la recta que pasa por los puntos $P(7,2)$ y $Q(5,-3)$

     Buscamos los coeficientes a y b de la expresión $y=ax+b$, para ello aplicamos que pasa por los puntos dados:

     pasa por: $\begin{array}{l} P(7,2) \\ Q(5,-3) \end{array} \qquad \begin{array}{l} 2=7a+b \\ -3=5a+b \end{array} \left.\right\} \left.\begin{array}{l} 7a+b=2 \\ 5a+b=-3 \end{array}\right\}$ restando desaparece la b : $2a=5; a=\frac{5}{2}$

     Sustituyendo: $7\frac{5}{2}+b=2; \quad \frac{35}{2}+b=2; \quad b=2-\frac{35}{2}; \quad b=-\frac{31}{2}$ luego la recta es $y=\frac{5}{2}x-\frac{31}{2}$

- Método de igualación

  Despejada la misma incógnita en las dos ecuaciones, se igualan los segundos miembros:

  $\begin{cases} y = x^2 - 4 \\ x - y = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} y = x^2 - 4 \\ y = x - 2 \end{cases}$ $x^2 - 4 = x - 2; \quad x^2 - x - 2 = 0$

  resolvemos la ecuación de 2^0 grado y resulta:

  $x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2}$ $\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -1 \end{cases}$

  sustituyendo en la segunda ecuación obtenemos: $\begin{array}{l} x = 2 \longrightarrow y = 0 \\ x = -1 \longrightarrow y = -3 \end{array}$

- Método gráfico

  Se representan en los ejes, las coordenadas del punto donde se cortan es la solución:

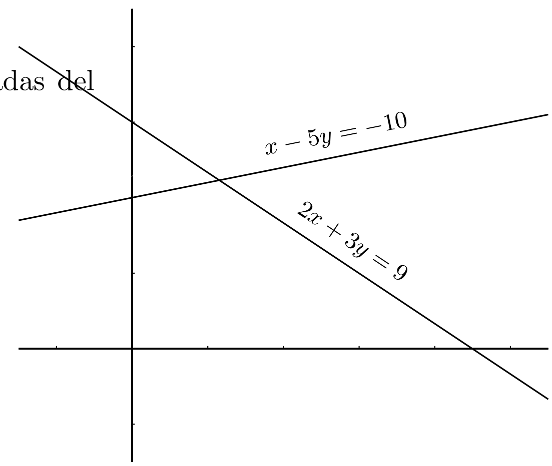
  $\begin{cases} 2x + 3y = 9 \\ x - 5y = -10 \end{cases}$

  $2x + 3y = 9$ $\begin{array}{c|cc} x & 0 & 9/2 \\ \hline y & 3 & 0 \end{array}$

  $x - 5y = -10$ $\begin{array}{c|cc} x & 0 & 5 \\ \hline y & 2 & 3 \end{array}$

  $y = \dfrac{29}{13}, \quad x = \dfrac{15}{13}$

  como se puede ver el dibujo no da las soluciones con precisión.



3.7. Desigualdades e inecuaciones

Las desigualdades son:

$<$ ... menor que ...	$\leq$ ... menor o igual que ...
$>$ ... mayor que ...	$\geq$ ... mayor o igual que ...

Propiedades de las desigualdades y aplicación a la resolución de inecuaciones:

1^a Si se suma o se resta un número a los dos miembros de una desigualdad, resulta otra desigualdad del mismo sentido.

Aplicación: Transposición de términos: un término con $+$, pasa con $-$, y un término con $-$, pasa con $+$.

Ej. $2x - 5 < 5x - 2; \quad 2x - 5x < 5 - 2$

2^a A) Si se multiplican o dividen los dos términos de una desigualdad por un número positivo, resulta otra desigualdad del mismo sentido.

Ej. $-5 \leq 2; \quad -5 \times 3 \leq 2 \times 3; \quad -15 \leq 6$

2^a B) Si se multiplica o divide los dos miembros de una desigualdad por un número negativo, resulta otra desigualdad de sentido contrario. Ej. $-5 < 2; \quad -5 \times (-7) < 2 \times (-7); \quad 35 > -14$

Aplicación: Quitar denominadores, multiplicando por el m.c.m, de los denominadores.

Ej. $\dfrac{2x-3}{5} \leq 1 - \dfrac{7}{2} + \dfrac{x}{10}$ multiplico por 10 (positivo) y queda: $4x - 6 \leq 10 - 35 + x$

Aplicación: Despejar la x pasando su coeficiente al otro miembro.

Ej. $5x < 12$ divido por 5 (positivo) $x < \dfrac{12}{5}$

Ej $-3x < -7$ divido por -3 (negativo) $x > \dfrac{-7}{-3}$

Inecuaciones lineales con una incógnita Ejemplo resolver:

$$\frac{x-1}{-3} - \frac{2x+3}{2} \leq x$$
$$\frac{-x+1}{3} - \frac{2x+3}{2} \leq x$$
$$-2x + 2 - 6x - 9 \leq 6x$$
$$-2x - 6x - 6x \leq 9 - 2$$
$$-14x \leq 7$$
$$x \geq \frac{-7}{14}$$
$$x \geq \frac{-1}{2}$$

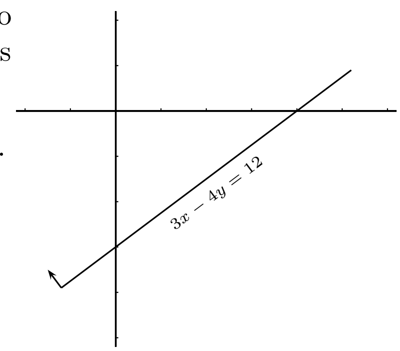
3.8. Inecuaciones lineales con dos incógnitas. Semiplanos.

Son expresiones de la forma $ax + by > c$.

Su representación gráfica es un semiplano cuya frontera es la recta $ax + by = c$.

Para ver cual de los dos semiplanos es el solución se estudia si un punto es solución (por ejemplo el origen), en caso afirmativo su semiplano es el semiplano solución.

La frontera está incluida en la solución si la desigualdad es no estricta.



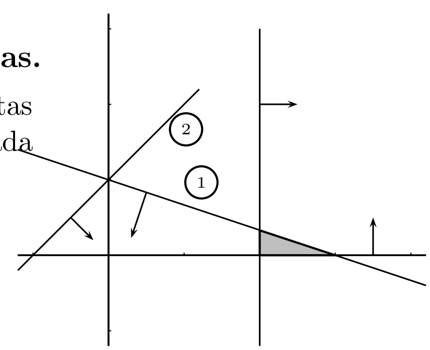
Ejemplo Resolver $3x - 4y \leq 12$

x	0	4
y	-3	0

Probamos el origen, punto $(0,0)$: $3{,}0 - 4{,}0 \leq 12$ sí es solución.

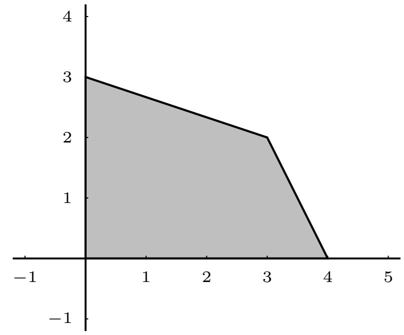
3.9. Sistemas de inecuaciones lineales con dos incógnitas.

La solución de un sistema de inecuaciones lineales con dos incógnitas vendrá dada por la intersección de los semiplanos solución de cada inecuación. Se llama **Región factible**.



Ejemplo Resolver:

$$\begin{cases} x + 3y \leq 3 & (1) \\ x \geq 2 & \\ x - y + 1 \geq 0 & (2) \\ y \geq 0 & \end{cases}$$



Ejemplo Hallar el sistema de inecuaciones cuya solución es la región del plano:

Recta por $(0,3),(3,2)$ es de ecuación $y = ax + b$

Pasa por: $\left.\begin{array}{lll} (0,3) & \text{sustituyendo} & 3 = 0a + b \\ (3,2) & \text{sustituyendo} & 2 = 3a + b \end{array}\right\}$ resulta $\begin{array}{l} b = 3 \\ a = \frac{-1}{3} \end{array}$

Recta por $(4,0),(3,2)$ es de ecuación $y = ax + b$

Pasa por: $\left.\begin{array}{lll} (4,0) & \text{sustituyendo} & 0 = 4a + b \\ (3,2) & \text{sustituyendo} & 2 = 3a + b \end{array}\right\}$ resulta resolviendo el sistema de ecuaciones: $\begin{array}{l} b = 8 \\ a = -2 \end{array}$

Luego la región viene dada por el sistema de inecuaciones: $\left\{\begin{array}{l} y \leq \dfrac{-1}{3}x + 3 \\ y \leq -2x + 8 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right.$

Problemas de ecuaciones y sistemas

1. Resolver
$\frac{x+1}{4} + \frac{3x-9}{10} = \frac{2x-3}{5} - \frac{1}{2}$
Solución: -3

2. Resolver $\frac{x-4}{5} = \frac{2x+3}{3}$
Solución: $-27/7$

3. Resolver $5x - 7\frac{-2}{3} + 11\frac{-2}{3} = 4$
Solución: $4/3$

4. Resolver $8x + 3\frac{x-1}{2} = 3 + \frac{5x-3}{-4}$
Solución: $21/43$

5. Resolver $6x - 5\frac{-8}{3} + 7\frac{-5}{9} = 4$
Solución: $-49/54$

6. Resolver
$\frac{x-2}{3} + \frac{2x+1}{4} = 3 - \frac{2x-3}{6}$
Solución: $47/14$

7. Tengo un montón de chirimoyas y unas cuantas cajas. Si meto 8 chirimoyas en cada caja me sobran 27 chirimoyas. Pero si meto 11 chirimoyas en cada caja, me sobran tres cajas. ¿Cuántas cajas tengo?
Solución: $8x + 27 = 11(x-3)$ 20 cajas

8. El producto de dos números naturales consecutivos es 182. Hallarlos.

9. Resolver $\frac{3x-2}{9} + x - \frac{8x}{3} = \frac{5x-4}{-3}$
Solución: $14/3$

10. Resolver
$\frac{5x-3}{10} + \frac{3x-2}{4} = \frac{2-3x}{4} + 4x$
Solución: $-13/20$

11. Resolver $3x^2 + 2x - 1 = 0$
Solución: $1/3, -1$

12. Resolver $3x^2 - 15 = 0$
Solución: $\pm\sqrt{5}$

13. Resolver $5x^2 + 7x = 0$
Solución: $0, -7/5$

14. Resolver $x^2 + x + 1 = 0$
Solución: no tiene solución real

15. Resolver $2x^2 + 12x + 18 = 0$
Solución: -3 doble

16. Resolver $5x - x^2/3 = 3x$
Solución: $0, 6$

17. Resolver $\frac{x^2}{5} + 5 = \frac{4x^2}{5} - 10$
Solución: ± 5

18. Resolver $3\sqrt{3}x^2 - \sqrt{6} = 0$
Solución: $\pm\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{3}}$

19. Resolver $\frac{\sqrt{2}}{2}x - 3x^2 = 0$
Solución: $0, \frac{\sqrt{2}}{6}$

20. Resolver $9x^2 - 12x + 7 = 0$
Solución: no tiene solución real

21. Resolver $2x^2 + 40x + 13 = 0$
Solución: $-0'33, -19'6$

22. Resolver $\frac{5(x-1)}{x+1} = \frac{2x+1}{x-1}$
Solución: $4, 1/3$

23. Resolver $\frac{3x^2-5}{(8x+1)^3} = 0$
Solución: $\pm\sqrt{5/3}$

24. Resolver $\frac{2x^2-5x}{x+1} = 2x$
Solución:

25. Resolver $\frac{5x^2-3}{8} + \frac{x}{6} = \frac{1}{5} + \frac{x^2}{8}$
Solución: $1'2, -0'3$

26. Resolver $\frac{x^2+2}{x^2-6} = \frac{2x^2-23}{21-x^2}$
Solución: $\pm\sqrt{2}, \pm 4$

27. Resolver $x^4 + 5x^2 - 36 = 0$
Solución: $\pm\sqrt{-9} \quad noreal, \pm 2$

28. Resolver $27x^4 - 9x^2 = 0$

    Solución: $\pm\sqrt{1/3}$,0

29. Resolver $\sqrt{3x-2} - 4 = 0$

    Solución: 6

30. Resolver $\sqrt{x+4} = 3 - \sqrt{x-1}$

    Solución: 13/9

31. Resolver $\dfrac{x-2}{4} - \dfrac{3x-5}{2} = \dfrac{2x}{6}$

    Solución: 24/19

32. Resolver $\dfrac{2}{3x} + \dfrac{30}{4} = \dfrac{3}{2x} - \dfrac{1}{6}$

    Solución: 5/46

33. Resolver
    $$\frac{5}{6}\left(x - \frac{1}{3}\right) + \frac{4}{6}\left(\frac{x}{5} - \frac{1}{7}\right) = 4 + \frac{8}{9}$$

    Solución: 5'44

34. Resolver $2 + \sqrt{x-5} = 13 - x$

    Solución: 14, 9

35. Resolver por todos los métodos
    $$\begin{cases} 3x - 2y = 12 \\ 2x + 3y = -6 \end{cases}$$

    Solución: $x = 24/13, y = -42/13$

36. Resolver por todos los métodos
    $$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 3x + 2y = 9 \end{cases}$$

    Solución: $x = 1, y = 3$

37. Resolver $\begin{cases} x - y = 2(x+y) \\ 2x - 3y = 0 \end{cases}$

    Solución: $x = 0, y = 0$

38. Resolver $\begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{y}{3} \\ 3(x+y-1) = x - y + 1 \end{cases}$

    Solución: $x = 1/2 y = 3/4$

39. Resolver $\begin{cases} \frac{x-1}{2} + \frac{y+1}{3} = 0 \\ \frac{2x+y}{3} - \frac{x+y+2}{4} = 0 \end{cases}$

    Solución: $x = 11/7, y = -13/7$

40. Resolver
    $$\begin{cases} 3x - (9x+y) = 5y - (2x+9y) \\ 4x - (3y+7) = 5y - 47 \end{cases}$$

    Solución: $x = 6, y = 8$

41. Resolver
    $$\begin{cases} y = (x+2)(x-3) \\ x + y - 3 = 0 \end{cases}$$

    Solución: $(3, 0); (-3, 6)$

42. Resolver
    $$\begin{cases} x(y-2) - y(x-3) = -14 \\ y(x-6) - x(y+9) = 54 \end{cases}$$

    Solución: $x = -2, y = -6$

43. Resolver $\begin{cases} \frac{x-3}{3} - \frac{y-4}{4} = 0 \\ \frac{x-4}{2} - \frac{y-2}{5} = 3 \end{cases}$

    Solución: $x = 138/7, y = 184/7$

44. Resolver $\begin{cases} \frac{x-1}{2} - \frac{y-1}{3} = -\frac{13}{36} \\ \frac{x+1}{3} - \frac{y+1}{2} = -\frac{2}{3} \end{cases}$

    Solución: $x = 1/2, y = 4/3$

45. Un examen tipo test constaba de 50 preguntas. Cada pregunta acertada se valoró con un punto, pero cada fallo restaba medio punto. Sabiendo que dejó sin contestar 10, la puntuación total que obtuvo un alumno fue de 32'5 puntos, ¿cuántas preguntas acertó?

    Solución: acertó 35

46. Una recta en el plano tiene de ecuación $y = ax + b$, hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(3, -1), B(5, 2)$

    Solución: $y = \frac{3x-11}{2}$

47. Entre dos estantes de una librería hay 80 libros. Si se pasan 10 libros del segundo al primer estante, ambos tienen el mismo número de libros. ¿Cuántos había al principio en cada uno?.

    Solución: $x = 30, y = 50$

48. Dos números suman 308 y al dividir el mayor por el menor resulta de cociente 7 y de resto 28. Calcular los dos números.

    Solución: 273, 35

49. Alumnos de dos grupos distintos, A y B, realizan un mismo examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. SS. II. Se sabe que la nota media en el grupo A ha sido 4,5 puntos y de 5,4 puntos en el B. Calcule el número de alumnos de cada grupo, sabiendo que los dos grupos A y B suman 72 alumnos y que la nota media de los 72 alumnos ha sido 4,95 puntos.

    Solución: 36 alumnos grupo A y 36 alumnos grupo B

50. Una factura de 410 pesos es pagada con 3 dólares y 2 libras esterlinas y otra de 2940 pesos con 10 dólares y 20 libras. Calcular el cambio a que están los dólares y las libras.

    Solución: libra: 118 pesos, dólar: 58 pesos

51. La diferencia de los cuadrados de dos números enteros es igual a 240 veces el menor y sumando 90 unidades a la diferencia de cuadrados es 30 veces el mayor. Hallar dichos números.

    Solución: Muy aparatoso $x = 27, y = 3$

52. Al invertir el orden de las cifras de un número de dos dígitos, este número queda disminuido en 36 unidades. Hallar el número sabiendo que dichas cifras suman 12.

    Solución: 84

53. Un abuelo dice a sus nietos: multiplicando mi edad por su cuarta y su sexta parte y dividiendo el producto por los 8/9 de la misma hallaréis 243 años, ¿cuál es mi edad?.

    Solución: 72

54. Dos embarcaciones salen al mismo tiempo para un puerto que dista 224 Km. Una de ellas navega a 2 Km/h más que la otra, y llega al punto donde se dirigen 2 horas antes que la otra. Halla las velocidades.

    Solución: 14

55. Una factura de 410 rupias es pagada con 3 dólares y 2 libras esterlinas y otra de 2940 rupias con 10 dólares y 20 libras. Calcular el cambio a que están los dólares y las libras.

    Solución: libra: 118 rupias, dólar: 58 rupias

56. Al unir los dos puntos medios de dos lados desiguales de un rectángulo se obtiene un segmento de 50 m de longitud. Hallar el área del rectángulo sabiendo que los lados son entre sí como 4 es a 3.

    Solución: 4800 m^2

57. Se llena una caja de forma cúbica con cubitos de un cm de arista y nos sobran 272 cubitos. Se construye otra caja que tiene un cm más de arista y entonces nos faltan 197 cubitos. ¿Cuántos cubitos tenemos?.

    Solución: número cubitos $= y$, arista$= x$, caben x^3, $y = 2000$

58. Resolver
    $$\begin{cases} \frac{1}{2x-3y+6} = \frac{1}{3x-2y-1} \\ \frac{6}{x-y+4} = \frac{10}{y+2} \end{cases}$$
    Solución: $x = 73/7, y = 932/133$

59. Resolver a) $5x - 3 \leq \dfrac{14x+7}{2}$

    b) $3 - 2x \geq \dfrac{5-3x}{4}$

    Solución:a) $x > -13/4$ b) $x < 7/5$

60. Resolver a) $\dfrac{3x-2}{4} - \dfrac{1-x}{2} \leq \dfrac{17x+1}{3}$

    b) $\dfrac{3x-1}{4} \geq \dfrac{5-x}{-2}$

    Solución:a) $x > -16/53$ b) $x > -9$

61. Resolver a) $\dfrac{12x-3}{4} - \dfrac{2-x}{3} \leq 1 + x$

    b) $2x - \dfrac{3x-1}{4} \leq \dfrac{x+2}{2} - 3$

    Solución:a) $x \leq 29/28$ b) $x \leq -3$

62. Representar el conjunto de puntos que satisfacen simultáneamente las desigualdades

    $x + y - 3 \leq 0$
    $x \geq 0$
    $y \geq 0$
    $x - y + 2 \geq 0$

63. Representar el conjunto de puntos que satisfacen simultáneamente las desigualdades

    $2x - y \geq -2$
    $x - y \geq -2$
    $x \leq 1$
    $2x - y \leq 3$

64. Resolver gráficamente el sistema de inecuaciones:

$x + y \geq 2$
$x \leq 1/2$
$y \leq 4$
$x - y \leq 0$

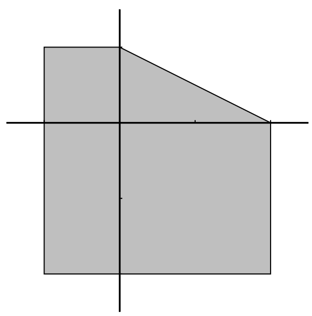
65. Resolver gráficamente el sistema de inecuaciones:

$7x + 2y \geq 14$
$4x + 5y \geq 20$

66. Resolver gráficamente el sistema de inecuaciones:

$12x + 5y \leq 120$
$6x + 8y \leq 180$
$5x + 10y \leq 100$
$x + y \geq 7$
$x \geq 0$
$y \geq 0$

67. Dada la región representada, hallar el sistema de inecuaciones correspondiente.



68. Hallar los vértices de la solución del sistema:

$2x + 5y < 10$
$4x - 2y + 14 > 0$
$y \geq -3$

Solución: $(-5, -3)$; $(-25/12, 17/6)$; $(25/2, -3)$

69. Resolver gráficamente:

$3x + y < 5$
$2x - 5y - 12 < 3$
$y \geq -4$

70. En una fábrica de bombillas se producen dos tipos de ellas, las de tipo normal y las halógenas. La producción está limitada por el hecho de que no pueden fabricarse al día más de 400 normales y 300 halógenas ni mas de 500 en total.

a) Representar la región del plano que muestra las posibilidades de producción de cada tipo de bombillas.

b) Si se venden a 4'5 € las normales y a 6 € las halógenas estudiar que producción daría el máximo beneficio.

Solución: $f(200, 300) = 2700$

71. El perímetro de un rectángulo es 90 m y su área 450 m^2. Hallar sus dimensiones.

Solución: 30 y 15

72. Hallar los puntos en que se cortan la recta que pasa por los puntos $(1, -3)$ y $(2, 4)$ y la parábola $y = 2x^2 - 4$.

Solución: $(2, 4)$, $(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$

73. Se reúnen varios amigos para comprar un balón de fútbol. Cada uno de ellos debe pagar 3'5 € . En el último momento se retiran tres y cada uno debe poner medio euro más. Calcular el precio del balón.

Solución: 84 €

4. POLINOMIOS

4.1. Expresiones algebraicas. Polinomios

Una expresión que incluye operaciones con letras se llama **expresión algebraica**, en ella las letras representan un número cualquiera.

Las expresiones del tipo $3x^2 - 5x + 4$ se llaman **polinomios**.

Cuando hay un solo sumando, por ejemplo $3x^2$, se llama monomio y cuando hay dos se llama binomio por ejemplo $1 - 6x^2$.

Grado de un polinomio es el mayor exponente de x que aparece $3x^4 - 2x$ tiene grado 4.

4.2. Suma y producto de polinomios

Suma Ejemplo:

$f(x) = 1 - 2x^2 + x \longrightarrow$ Grado 2
$g(x) = 2x^2 + 3x \longrightarrow$ Grado 2

$f(x) + g(x) = 4x + 1 \longrightarrow$ Grado 1

Producto Ejemplo:

$(2x + 3)(5x - 4) = 2x(5x - 4) + 3(5x - 4) = 10x^2 - 8x + 15x - 12 = 10x^2 + 7x - 12$

El grado del polinomio del producto es la suma de los grados de los polinomios factores.

4.3. División de polinomios

En los numeros teníamos la división entera: $\begin{array}{r|l} 37 & 12 \\ \cline{2-2} 01 & 3 \end{array}$

Cumpliéndose: "dividendo = divisor $\times$ cociente + resto"

De la misma forma para los polinomios: $\begin{array}{l|l} 4x^3 - 2x^2 + 9x + 1 & 2x^2 - x \\ \cline{2-2} -4x^3 + 2x^2 & 2x \\ \cline{1-1} 0 + 0 + 9x + 1 & \end{array}$

En los polinomios se puede dividir hasta que el resto es de menor grado que el divisor.

También: dividendo = divisor $\times$ cociente + resto, abreviadamente: $D = d \times Q + R$

$4x^3 - 2x^2 + 9x + 1 = (2x^2 - x) \cdot 2x + (9x + 1)$

Observamos que el grado del dividendo es igual al grado del divisor más el grado del cociente.

4.4. Regla de Ruffini

Es un procedimiento abreviado de división, cuando el divisor es de la forma $x - a$:

Ejemplo: $(2x^3 - 3x^2 + 1) : (x - 8)$

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 2 & -3 & 0 & 1 \\ 8 & & 16 & 104 & 832 \\ \hline & 2 & 13 & 104 & 833 \end{array}$$

$Q = 2x^2 + 13x + 104$
$R = 833$

4.5. Valor numérico de un polinomio

Valor numérico de un polinomio para $x = b$ es lo que resulta de sustituir en el polinomio x por b:

Valor numérico para $x = 2$ de $f(x) = 5x^3 + 2x^2 - 7$, es: $f(2) = 5 \cdot 8 + 2 \cdot 4 - 7 = 40 + 8 - 7 = 41$

Un número b es **raíz** de un polinomio cuando el valor numérico del polinomio en b es 0, es decir, b es raíz de $f(x)$ cuando $f(b) = 0$.

Ejemplo: 2 es raíz de $f(x) = 3x^3 - 5x^2 - 4$ porque $f(2) = 0$

Por tanto, es lo mismo decir que b es raíz del polinomio $f(x)$, que decir que b es solución de la **ecuación** $f(x) = 0$.

Ejemplo:

2 es raíz de $f(x) = 3x^3 - 5x^2 - 4$, es igual que, 2 es solución de la ecuación $3x^3 - 5x^2 - 4 = 0$.

4.6. Teorema del resto

El resto de dividir un polinomio por $x - a$ es igual al valor numérico del polinomio en a, es decir, el resto de dividir $f(x)$ por $x - a$ es $R = f(a)$.

Ejemplo: $f(x) = 3x^5 + 4x^2 - 5$, dividido por $x - 1$

$$\begin{array}{r|rrrrr|r} & 3 & 0 & 0 & 4 & 0 & -5 \\ 1 & & 3 & 3 & 3 & 7 & 7 \\ \hline & 3 & 3 & 3 & 7 & 7 & 2 \end{array} \quad \begin{array}{l} Q = 3x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 7x + 7 \\ R = 2 \end{array} \qquad f(1) = 2$$

Consecuencia Si b es una raíz entera de un polinomio tiene que ser un divisor del término independiente. Por tanto, para buscar las raíces enteras de un polinomio por Ruffini, hay que probar los divisores del término independiente.

Ejemplo: Resolver la ecuación: $2x^3 - 5x^2 + 2x - 15 = 0$

Los divisores de -15 son $\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 15$

probemos $x = 3$ por Ruffini: $\begin{array}{r|rrr|r} & 2 & -5 & 2 & -15 \\ 3 & & 6 & 3 & 15 \\ \hline & 2 & 1 & 5 & 0 \end{array}$

Como el cociente $2x^2 + x + 5$ es de 2^0 grado para buscar otras soluciones es mejor resolver la ecuación de segundo grado

$x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 - 40}}{4}$ que no da soluciones reales

luego 3 es la única raíz real de $f(x)$.

4.7. Descomposición de un polinomio en factores

Para hallar las raíces y descomponer un polinomio las herramientas son: factor común, diferencia de cuadrados, ecuación de segundo grado, ecuación bicuadrada y en último caso Ruffini.

En la descomposición en factores si se han obtenido raíces fraccionarias se multiplica por el coeficiente principal:

Ejemplo: 2 es raíz de $f(x) = 3x^3 - 5x^2 - 4$ porque $f(2) = 0$, lo que equivale a decir:

$x = 2$ es solución de la ecuación $3x^3 - 5x^2 - 4 = 0$, lo que equivale a decir:

$(x - 3)$ es factor de la descomposición en factores de $f(x) = 3x^3 - 5x^2 - 4$

Ejemplos:

1. $f(x) = x^5 - 9x = x(x^2 - 3)(x^2 + 3) = x(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(x^2 + 3)$, las raíces son: $0, \sqrt{3}, -\sqrt{3}$

2. En el polinomio de la ecuación anterior la descomposición es:

   $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 2x - 15 = (2x^2 + x + 5)(x - 3)$

3. $x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 7x + 6$ tiene como raíces: $x = -1$ doble; $x = 2$; $x = 3$ la descomposición es: $x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 7x + 6 = (x + 1)^2(x - 2)(x - 3)$

4. $3x^2 + 5x - 2 = 3(x + 2)\left(x - \dfrac{1}{3}\right)$

Los polinomios que no se pueden descomponer son los de grado 1 y los de grado 2 sin raíces reales.

Ejemplo: Hallar un polinomio de segundo grado verificando que el coeficiente del término de primer grado es 4, el valor numérico en 2 es 9 y el resto de dividirlo por $x + 3$ es igual al valor numérico en 1.

Buscamos $f(x) = ax^2 + bx + c$

Coeficiente de primer grado $b = 4$

$f(2) = 9$ luego $a4 + b2 + c = 9$ queda $4a + 8 + c = 9$ resulta $4a + c = 1$

$f(-3) = f(1)$ sustituyendo $a(-3)^2 + b(-3) + c = a + b + c$

simplificando: $9a - 12 + c = a + 4 + c$, $\quad 9a - 12 = a + 4$, $\quad 8a = 16$

Resulta el sistema: $\begin{cases} 4a + c = 1 \\ 8a = 16 \end{cases}$ queda $a = 2$, $\quad 4 \cdot 2 + c = 1$, $\quad c = -7$

El polinomio es $f(x) = 2x^2 + 4x - 7$

4.8. Fracciones algebraicas. Operaciones con fracciones algebraicas

Las fracciones algebraicas son expresiones de la forma $\dfrac{\text{polinomio}}{\text{polinomio}}$ y se opera con ellas de modo parecido a como se hace con fracciones numéricas.

Ejemplos

- Efectuar $\dfrac{3x}{x-5} - \dfrac{1-x}{2x+1} =$

  El denominador común es el producto de los denominadores:

  $$\frac{3x}{x-5} - \frac{1-x}{2x+1} = \frac{3x(2x+1) - (1-x)(x-5)}{(x-5)(2x+1)} = \frac{6x^2 + 3x - (x - 5 - x^2 + 5x}{(x-5)(2x+1)} = \frac{6x^2 + 3x - x + 5 + x^2 - 5x}{(x-5)(2x+1)}$$
  $$\frac{7x^2 - 3x + 5}{(x-5)(2x+1)}$$

- Efectuar $\dfrac{3x+4}{x^2-1} - \dfrac{x}{x+1} =$

  Como el mcm de los denominadores es $x^2 - 1$ tenemos:

  $$\frac{3x+4}{x^2-1} - \frac{x}{x+1} = \frac{3x + 4 - x(x-1)}{x^2-1} = \frac{3x + 4 - x^2 + x}{x^2-1} = \frac{-x^2 + 4x + 4}{x^2-1}$$

- Simplificar $\dfrac{2(x-9)^2 - 3x(x-9)}{(x-9)^3}$

  Se puede dividir numerador y denominador por $x - 9$ y resulta:

  $$\frac{2(x-9)^2 - 3x(x-9)}{(x-9)^3} = \frac{2(x-9) - 3x}{(x-9)^2} = \frac{2x - 18 - 3x}{(x-9)^2} = \frac{-x - 18}{(x-9)^2}$$

- Resolver: $3 - \dfrac{2x}{1 - x^2} = 0$

efectuando queda: $\dfrac{3(1-x^2)-2x}{1-x^2}=0;\quad \dfrac{-3x^2-2x+3}{1-x^2}=0;\quad -3x^2-2x+3=0;\quad 3x^2+2x-3=0$ pues se anula el numerador

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{4+36}}{6}=\frac{-2\pm\sqrt{40}}{6}\quad \left\{\begin{array}{l} x_1=\frac{-2+\sqrt{40}}{6}=0'72075 \\ x_2=\frac{-2-\sqrt{40}}{6}=-1'3874 \end{array}\right.$$

Problemas de polinomios

1. Siendo $f = 3x^2 - x, \quad g = 3x^4 - x^2$, hallar $f.g - f^2$.

   Solución: $9x^6 - 3x^5 - 12x^4 + 7x^3 - x^2$

2. Multiplicar en línea

   a) $(3x^2 - 2x)(1 - x)$

   b) $(5x^2 - 2x^3)(3x^3 + 2x)$

   Solución: a)$-3x^3 + 5x^2 - 2x$

   b) $-6x^6 + 15x^5 - 4x^4 + 10x^3$

3. Efectuar $(5x^4 + 2x^3) : (x^2 - 3x)$

   Solución: $Q = 5x^2 + 17x + 51, R = 153x$

4. Efectuar

   $(6x^5 - x^3 + x^2) : (2x^4 - x)$

   Solución: Q $= 3x$, R $= -x^3 + 4x^2$

5. Efectuar $(4x^6 - 2x^4 + x) : (2x^4 + x^3)$

   Solución: Q $= 2x^2 - x - \frac{1}{2}$, R $= \frac{1}{2}x^3 + x$

6. Siendo $f = 3x^2 - 5x, \quad g = 2x^2 + x - 1$. Hallar $f.g - g^2$

   Solución: $-2x^4 - 11x^3 - 5x^2 + 7x - 1$

7. Efectuar $\dfrac{\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x-2}}{1 + \frac{4}{x^2-4}} =$

   Solución: $-\dfrac{4}{x^2}$

8. Efectuar

   $\dfrac{ax + ay}{bx - by} . \dfrac{x^2 - 2xy + y^2}{x^2 - y^2} . \dfrac{b}{ay - a} =$

   Solución: $\dfrac{1}{y - 1}$

9. Efectuar $\dfrac{16(x - 2)^2 - 16x(x - 2)}{(x - 2)^4} =$

   Solución: $\dfrac{-32}{(x - 2)^3}$

10. Dividir $(5x^3 - 2x^2 + 3) : (x^2 - 3) =$

    Solución: $Q = 5x - 2, R = 15x - 3$

11. Dividir por Ruffini

    $(3x^8 - 5x^2 + 7x) : (x + 1) =$

    Solución: $Q = 3x^7 - 3x^6 + 3x^5 - 3x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 2x + 9, R = 9$

12. Dividir por Ruffini

    $(2x^5 - 3x^2 + 3) : ((x - 2) =$

    Solución: $Q = 2x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 13x + 26, R = 55$

13. Llamando $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$ respectivamente a los dividendos de los tres problemas anteriores, hallar $f(4)$, $g(-1)$, $h(2)$ y $h(-3)$.

    Solución: $f(4) = 291, g(-1) = -9, h(2) = 55, h(-3) = -510$

14. Hallar un polinomio de 2^o grado verificando: no tiene término independiente, el valor numérico en 3 es igual al resto de dividirlo por $x - 1$, toma el valor 16 en -2.

    Solución: $\dfrac{4}{3}x^2 - \dfrac{16}{3}x$

15. Hallar un polinomio de 2^o grado que sea divisible por $x - 3$, que tome el valor 5 para $x = -2$ y cuyo coeficiente principal sea 1.

    Solución: $x^2 - 2x - 3$

16. Hallar a para que la división siguiente sea exacta $(x^5 - 7x^4 - ax^2 + 1) : (x - 2)$

    Solución: $-79/4$

17. Efectuar

    $(2x^6 - x^5 + x^4) : (x^3 + 2x) =$

    Solución: $Q = 2x^3 - x^2 - 3x + 2, R = 6x^2 - 4x$

18. Efectuar

    $(2x^4 - x^3) : (2x^3 + x) =$

    Solución: $Q = x - 1/2, R = -x^2 + x/2$

19. Efectuar $(6x^4 - 5x^2) : (x - 1) =$

    Solución: $Q = 6x^3 + 6x^2 + x + 1, R = 1$

20. Efectuar

    $(8x^4 + 2x^3 - 3x^2 + x + 5) : (4x^2 - x) =$

    Solución: $Q = 2x^2 + x - 1/2, R = x/2 + 5$

21. Hallar las raíces del polinomio y descomponer

    $f(x) = x^3 - 12x^2 + 7x$

    Solución: $0, 6 \pm \sqrt{29}$

22. Hallar las raíces del polinomio y descomponer

    $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$

    Solución: ± 1, dobles

23. Hallar las raíces del polinomio y descomponer

    $f(x) = 3x^3 - 10x - 51$

    Solución: 3

24. Hallar las raíces del polinomio y descomponer

    $f(x) = 5x^3 - 37x^2 + 64x - 20$

    Solución: $2, 5, 2/5$

25. Hallar las raíces del polinomio y descomponer

    $f(x) = x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 7x + 6$

    Solución: $2, 3, -1$ doble

26. Hallar las raíces del polinomio y descomponer

    $f(x) = x^4 - 3x^3 - 10x^2 + 24x$

    Solución: 0, 2,-3,4

27. Hallar las raíces y descomponer

    $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$

    Solución: $2, -1, -3$

28. Hallar las raíces y descomponer

    $f(x) = x^4 - x$

    Solución: $x(x-1)(x^2+x+1)$

29. Descomponer $f(x) = x^5 - 4x$

    Solución: $x(x^2+2)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$

30. Descomponer $f(x) = x^3 - 2x^2 - x$

    Solución: $x[x-(1-\sqrt{2})][x-(1+\sqrt{2})]$

31. Descomponer $f(x) = 2x^5 - 18x$

    Solución: $2x(x^2+3)(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$

32. Descomponer

    $f(x) = x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 6x$

    Solución: $x(x-1)(x-3)(x+2)$

33. Descomponer

    $f(x) = x^3 - 9x^2 + 26x - 24$

    Solución: $(x-2)(x-3)(x-4)$

34. Descomponer $f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 2$

    Solución: $2(x-1)^2(x+1)^2$

35. Hallar las raíces y descomponer

    $f(x) = 2x^4 - 4x^2$

    Solución: $2x^2(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$

36. Despejar la x en: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{x}{g}}$

    Solución: $x = g\left(\dfrac{T}{2\pi}\right)^2$

37. Efectuar

    $3 - \dfrac{4x}{1-x^2}$

38. Efectuar

    $\dfrac{2x^2 - x}{x+1} - 2x$

39. Simplificar

    $\dfrac{3x^2 - 5x + 2x^3}{x^2 - x}$

40. Efectuar

    $\dfrac{2x+3}{1-x^2} - \dfrac{x}{1+x}$

41. Resolver

    $\dfrac{x^2+1}{x^2-2x} - 1 = 0$

    Solución: $-1/2$

42. Resolver

    $2 + \dfrac{2x+1}{3x+1} = 0$

    Solución: -3/8

43. Resolver

    $\dfrac{2x(x^2-x-2) - x^2(2x-1)}{(x^2-x-2)^2} = 0$

    Solución: 0 y -4

44. Resolver

    $2 + \dfrac{(2x-1)(x-1) - (x^2-x+4)}{(x-1)^2} = 0$

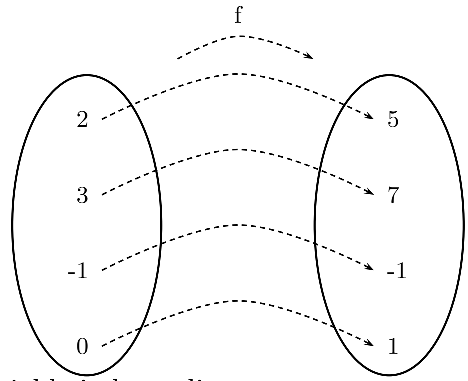
    Solución: $\dfrac{3 \pm \sqrt{12}}{3}$

5. FUNCIONES I

5.1. Función

Una función transforma números en números,

Dicho con más precisión, una función es una aplicación [1] en la que el conjunto original y el conjunto final están formados por números.



Ejemplo

$$\begin{array}{ll} f: & R \longrightarrow R \\ & x \longrightarrow f(x) = 2x+1 \end{array}$$

Esta función de los números reales en los números reales le asocia a cada número su doble más uno.

En general una función se representa : $y = f(x)$

x es un elemento cualquiera del conjunto original, se llama variable independiente;

y representa su correspondiente imagen en el conjunto final, se llama variable dependiente.

Al conjunto de valores que toma x se le llama **dominio** D , es un subconjunto del conjunto original, si no se especifica, es el mayor posible.

Ejemplos

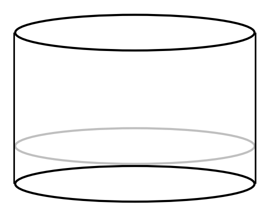
1. $\begin{array}{lll} f: & [-1,1] & \longrightarrow R \\ & x & \longrightarrow f(x) = \frac{1}{x-2} \end{array}$, $\quad Dom(f) = [-1,1]$

2. $y = \dfrac{1}{x-2}, \quad Dom(f) = R - 2$

3. $y = \sqrt{x+3}$, ha de ser: $x + 3 \geq 0, x \geq -3, \quad Dom(f) = [-3, \infty)$

   Al conjunto de valores que toma la y se le llama rango, recorrido ó imagen, (se deduce de la gráfica).

4. Se tiene un depósito cilíndrico de agua de diámetro 10 m y altura 7 m.
   Expresar el volumen de agua en función de la altura h del agua en el depósito.
   Solución:
   Volumen cilindro = área de la base $\times$ altura
   $V = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot 5^2 \cdot h = 25 \cdot \pi \cdot .h \approx 78'5 \cdot h \quad m^3$
   El dominio de esta función es $[0, 7]$.



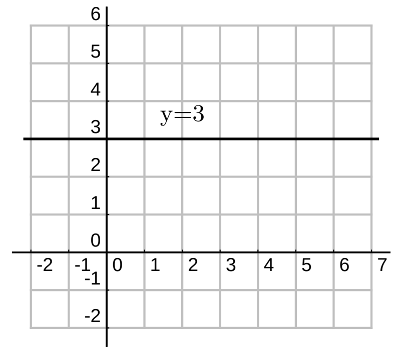
5.2. Gráfica de una función

Dada una función $y = f(x)$, los puntos de coordenadas $(x, f(x))$ representan puntos del plano, el conjunto de ellos es la gráfica de la función.

---

[1] aplicación quiere decir que un número no puede tener más de una imagen, por ejemplo $y^2 = x$ que equivale a $y = \pm\sqrt{x}$, NO ES FUNCIÓN

5.3. Gráfica de una función polinómica de grado 0



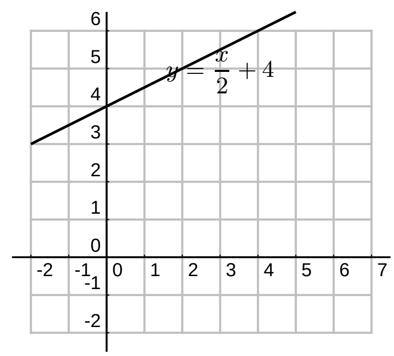
Sea por ejemplo $y = 3$
(podemos pensar en $y = 3 + 0x$)

x	0	1	2	3
y	3	3	3	3

La gráfica de una función polinómica de grado cero, o sea, y = constante, es una recta paralela al eje de abcisas

De manera parecida la representación de $x = -5$ será una recta vertical

5.4. Gráfica de una función polinómica de grado 1



La gráfica de una función polinómica de grado 1, o sea, $y = ax + b$, es una recta que se determina hallando únicamente dos puntos.

Ejemplo: $y = \dfrac{x}{2} + 4$

x	0	4
y	4	6

5.5. Gráfica de una función polinómica de grado 2

La gráfica de una función polinómica de grado 2, o sea, $y = ax^2 + bx + c$, es una parábola.

Para representarla hacemos los siguientes pasos:

1. si el coeficiente de x^2 es positivo es abierta hacia arriba $\bigcup$

   si el coeficiente de x^2 es negativo es abierta hacia abajo $\bigcap$

2. hallamos los puntos de corte con los ejes

   con el eje OX se hace $y = 0$ y se resuelve la ecuación de 2^0 grado

   con el eje OY se hace $x = 0$

3. hallamos el vértice: la abcisa del vértice viene dada por $x_v = \dfrac{-b}{2a}$, para hallar y_v sustituimos x_v en la función

4. si tenemos pocos puntos para representar hallamos alguno más dando valores a la x.

Ejemplos:

1. $y = x^2 - 4x$

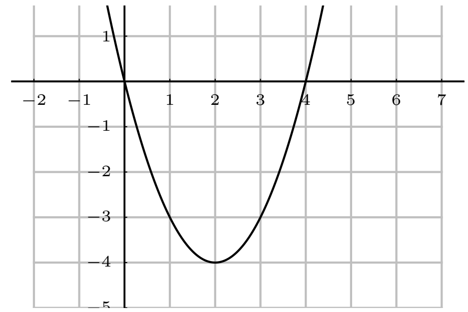
   1) abierta hacia arriba
   2) cortes con los ejes

   con OX, $\quad y = 0$, resulta: $0 = x^2 - 4 = x(x - 4)$ $\begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_2 = 4 \end{matrix}$

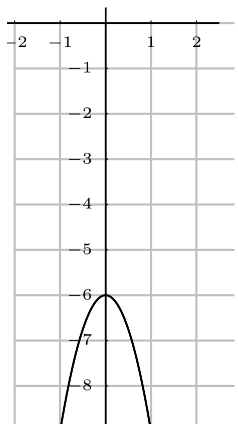
   con OY, $\quad x = 0$, ya hallado.

   3) vértice $x_v = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{4}{2} = 2, \quad y_v = f(2) = -4$

	x	y
	0	0
	4	0
vértice	2	-4



2. $y = -3x^2 - 6$



   1) abierta hacia abajo
   2) cortes con los ejes
   con OX, $\quad y = 0, \quad 0 = -3x^2 - 6$ que no da raíces reales
   con OY, $\quad x = 0, \quad y = -6$
   3) vértice $x_v = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{0}{6} = 0, \quad y_v = -6$

   interesa dar más valores:

	x	y
vértice	0	-6
	1	-9
	-1	-9

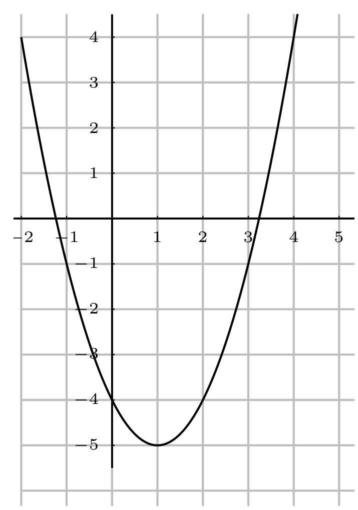
3. $f(x) = x^2 - 2x - 4$

   1) abierta hacia arriba
   2) Cortes con los ejes
   $y = 0$

   $$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 16}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{20}}{2} = \approx \begin{cases} 3'23 \\ -1'23 \end{cases}$$

   3) vértice $x_v = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{2}{2} = 1$

	x	y
	$3'23$	0
	$-1'23$	0
vértice	1	-5
	0	-4
	-2	4



5.6. Gráfica de una función definida a trozos

$$f(x) = \begin{cases} 4 & si \quad x \le -2 \\ x^2 - 2x - 4 & si \quad -2 < x \le 1 \\ 2x + 1 & si \quad 1 < x \end{cases}$$

En las funciones definidas a trozos hay que dar también los valores de x en que cambia de expresión.

El primer trozo es una recta horizontal.

El segundo es una parábola:
$y = x^2 - 2x - 4$

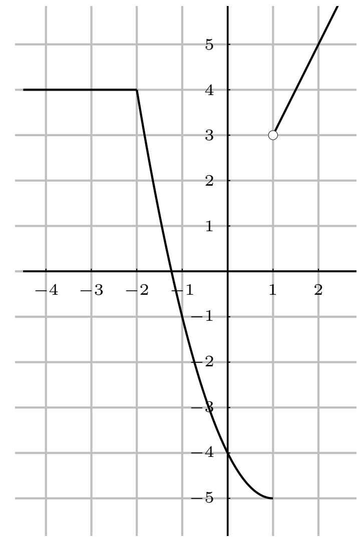
$x^2 - 2x - 4 = 0; x =$ (ejemplo anterior) $\approx \begin{cases} 3'23 \\ -1'23 \end{cases}$

vértice: $x_v = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{2}{2} = 1$

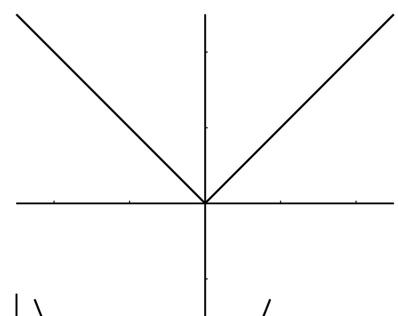
x	y
$3'23$	0
$-1'23$	0
1	-5
-2	4

El tercer trozo $2x + 1$ es una recta:

x	y
1	3
2	5



5.7. Función valor absoluto



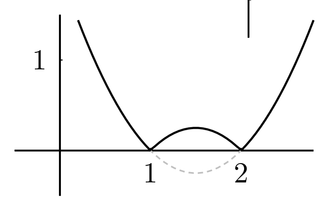
$$|x| = \begin{cases} x & si \quad x \geq 0 \\ -x & si \quad x < 0 \end{cases}$$

nota: el signo "$-$"delante de una letra le cambia el signo, no dice que sea negativa.

Ejemplos

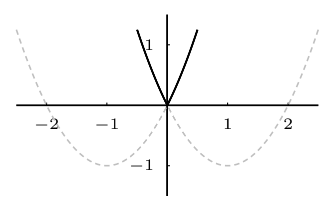
1. Representar $y = |x^2 - 3x + 2|$

   para ello representamos $f(x) = x^2 - 3x + 2$ y luego hacemos la simetría de la parte que queda debajo del eje de abcisas



2. Representar $y = x^2 + 2|x|$

   escribimos la función a trozos: $y = \begin{cases} x^2 + 2x & si \quad x \geq 0 \\ x^2 - 2x & si \quad x < 0 \end{cases}$



5.8. Clasificación de las funciones

Recordemos que una función transforma números en números.

EMPIRICAS: (No tienen fórmula.) Ej.: temperatura de un enfermo dependiendo del tiempo transcurrido.

ANALITICAS: (Con fórmula)

Trascendentes : $y = e^x$

Algebraicas :

Irracionales : x dentro de raíz: $y = \sqrt{x+4}$.

Racionales : x no dentro de raíz.

Fraccionarias : x en denominador: $y = \dfrac{1}{x+3}$

Polinómicas : $y = \sqrt{3}x - \dfrac{5}{4}$

5.9. Operaciones con funciones

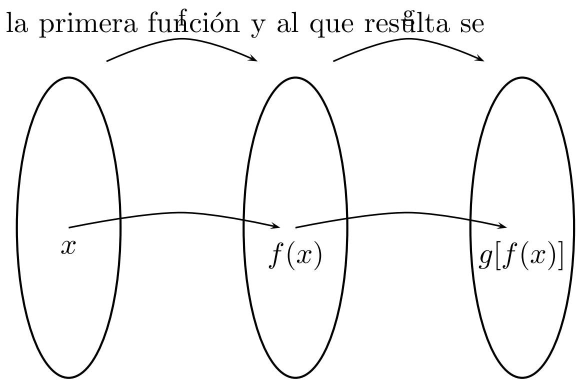
Para sumar, multiplicar, dividir, ..., dos funciones, se suman, multiplican, dividen, ..., sus expresiones.

$f(x) = 3x - 5; \qquad g(x) = \sqrt{x}$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = 3x - 5 + \sqrt{x}$$
$$(f.g)(x) = f(x).g(x) = (3x-5)\sqrt{x}$$
$$(f/g)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{3x-5}{\sqrt{x}}$$

5.10. Composición de funciones

En la composición de funciones a un número se le aplica la primera función y al que resulta se le aplica la segunda.



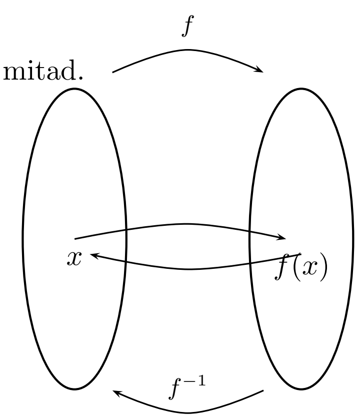
Función compuesta de dos funciones es la función que a cada valor de la variable independiente le asocia la imagen por la 2^a función de la imagen de la 1^a función.

$f(x) = 2x; \quad g(x) = x^3$
$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(2x) = (2x)^3 = 8x^3$

La composición de funciones no es conmutativa.
$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(x^3) = 2x^3$

5.11. Función inversa

Si f asocia a x su doble $2x$, la función inversa será f^{-1} que asocia a x su mitad.



Función identidad es la que a cada valor de x le asocia el mismo valor de x.

Por eso cuando se aplica al resultado de una función la función inversa se obtiene el mismo valor de partida como en la función identidad.

Ejemplo Comprobar que son inversas las funciones:

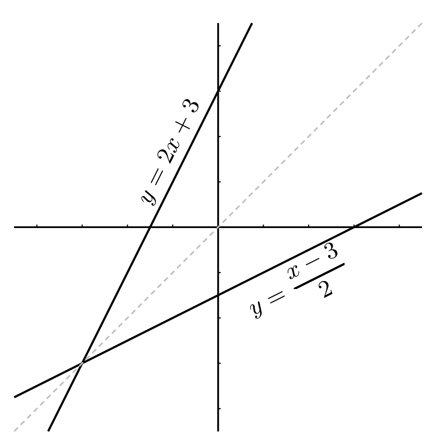
$f : y = 2x + 3, \quad g : y = \dfrac{x-3}{2}$

$g[f(x)] = g(2x+3) = \dfrac{(2x+3)-3}{2} = x$

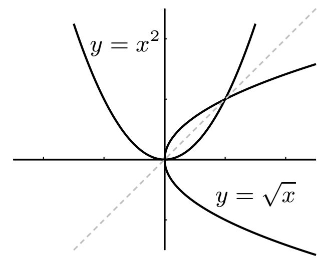
efectivamente: $g = f^{-1}$

f:	x	y
	0	3
	2	7

g:	x	y
	3	0
	5	1



Las gráficas de dos funciones inversas son simétricas respecto a la bisectriz del primer cuadrante.
Si f^{-1} es la inversa de f, f es la inversa de f^{-1}, por eso se dice simplemente que son inversas.



No siempre existe función inversa.
Por ejemplo: $f : y = x^2$
en la gráfica vemos que si hubiera inversa para ella cada original tendría dos imágenes y no sería función

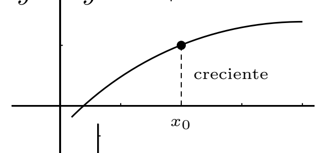
Cálculo de la función inversa Para hallar la función inversa, se intercambia la x con la y, luego se despeja la y.

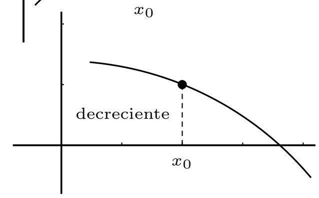
Ejemplo Hallar la inversa de la función : $f(x) = \dfrac{2x+3}{x-1}$

$$y = \frac{2x+3}{x-1}; \quad x = \frac{2y-3}{y-1}; \quad x(y-1) = 2y+3; \quad xy - x = 2y+3; \quad xy - 2y = x+3$$

$$y(x-2) = x+3; \quad f^{-1} : y = \frac{x+3}{x-2}$$

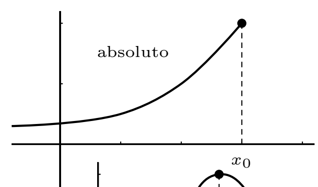
5.12. Función creciente, decreciente, máximos y mínimos

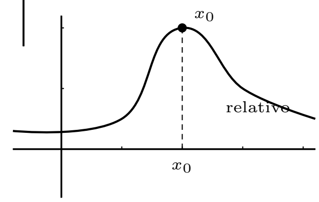




Una función es **creciente** cuando al aumentar la x entonces aumenta la y. Gráfica hacia arriba.

Una función es **decreciente** cuando al aumentar la x entonces disminuye la y. Gráfica hacia abajo.





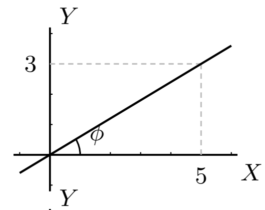
Una función tiene un **máximo absoluto** en un punto x_0, si en ese punto toma el mayor valor.

Una función tiene un **máximo relativo** en un punto x_0, si en ese punto toma mayor valor que en los puntos de alrededor.

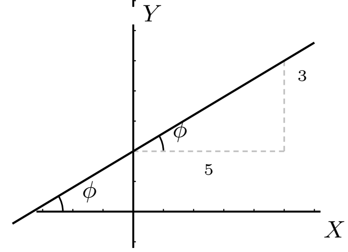
Análogo sería para **mínimo absoluto** y **mínimo relativo**.

5.13. Pendiente de una recta

Si consideramos la recta $y = \frac{3}{5}x$, en la gráfica vemos que el coeficiente de x : $\quad m = \frac{3}{5}$ es la tangente del ángulo ϕ que forma con la horizontal.



La recta $y = \frac{3}{5}x + 2$ es la anterior subida 2 unidades hacia arriba.
El coeficiente de x sigue siendo el mismo $m = \frac{3}{5} = \tan\phi$ se llama pendiente de la recta. Luego en general:

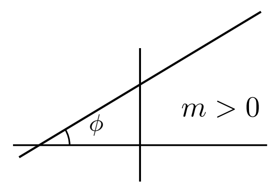


En la ecuación explícita $y = mx + n$, el coeficiente de x **m** se llama **pendiente** de la recta.

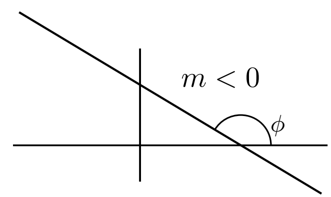
Además: $m = \tan\phi$ es la tangente del ángulo que forma con la horizontal positiva OX.

Resumiendo:
Cuando la y está despejada, el coeficiente de x es la tangente del ángulo que forma la recta con la horizontal positiva.

Las tangentes de los ángulos agudos son positivas y las de los ángulos obtusos son negativas. Luego por tanto:



- Si la pendiente es positiva la recta es creciente.
- Si la pendiente es negativa la recta es decreciente.



Por otro lado se tiene que n es la ordenada en el origen.
Dos rectas paralelas tienen igual pendiente.

Ejemplo Hallar la recta paralela a $y = \frac{3}{5}x + 2$ que pasa por el punto $(4, 6)$

La recta que busco será $y = \frac{3}{5}x + n$

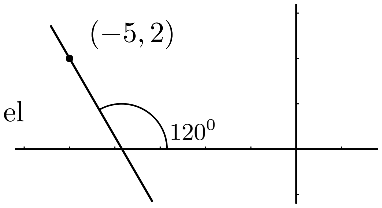
Haciendo que pase por el punto $(4, 6)$ resulta: $6 = \frac{3}{5}4 + n, \quad n = \frac{18}{5}$, luego la recta paralela buscada es $y = \frac{3}{5}x + \frac{18}{5}$

Ejemplo Hallar el ángulo que forma con el eje de las "x"positivas la recta $4x + 7y + 5 = 0$

Despejando y resulta $y = \frac{-4}{7}x + \ldots$, luego la pendiente es $m = \frac{-4}{7} = \tan\phi$, con la calculadora resulta $\phi : ar\tan(\frac{-4}{7}) = -29'7^0$, restando de 180^0 se obtiene $\phi = 180^0 - 29'7^0 = 150'3^0$

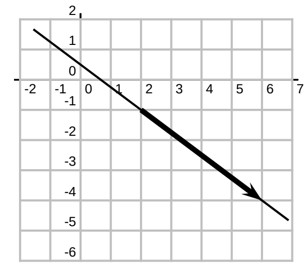
También se usa la siguiente ecuación de la recta:

$\boxed{y - y_0 = m(x - x_0)}$ **ecuación punto pendiente**, en la que (x_0, y_0) son las coordenadas de un punto



Ejemplo Hallar la recta que pasa por el punto $(-5, 2)$ y forma con el eje de las "x"positivas un ángulo de 120^0.

A partir del dibujo: $m = \tan 120^0 = -1'73$
podemos escribir ya la ecuación punto pendiente: $y - 2 = -1'73(x + 5)$

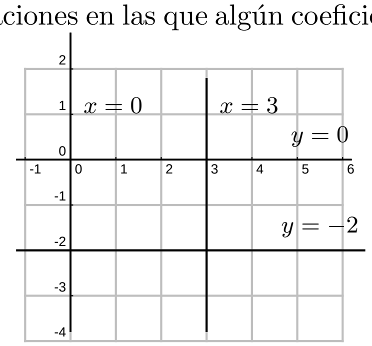


Ejemplo Hallar la recta que pasa por el punto $(2, -1)$ y tiene la dirección del vector $(4, -3)$. Escribir sus ecuaciones explícita y general.
A partir del dibujo: $m = \tan \phi = \dfrac{-3}{4}$
podemos escribir ya la ecuación punto pendiente: $y + 1 = \dfrac{-3}{4}(x - 2)$
despejando y tenemos la explícita $y = \dfrac{-3}{4}x + \dfrac{1}{2}$

Pasando todo al primer miembro e igualando a 0 tenemos la **ecuación general o implícita de la recta**.

En el ejemplo $3x + 4y - 2 = 0$

Rectas paralelas a los ejes Por su posición especial tienen ecuaciones en las que algún coeficiente es cero y no aparece:

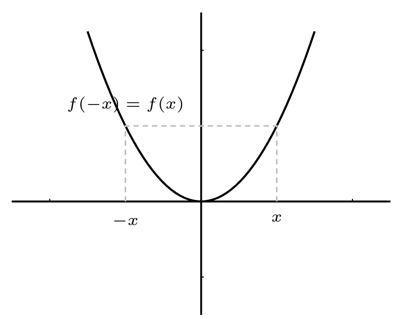


recta vertical: $x = 3$

recta horizontal: $y = -2$

la recta $x = 0$ es el eje de ordenadas.

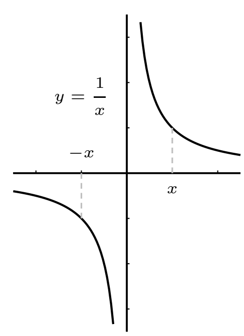
5.14. Función par y función impar



Una función $f(x)$ es **par** cuando $f(-x) = f(x)$.

Ejemplo La función: $y = x^2$
$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$; sí es par.
La gráfica de una función par es simétrica respecto al eje de ordenadas.

Una función $f(x)$ es **impar** cuando $f(-x) = -f(x)$.



Ejemplo $y = \dfrac{1}{x}$
$f(-x) = \dfrac{1}{-x} = -\dfrac{1}{x} = -f(x)$, sí es impar

La gráfica de una función impar es simétrica respecto al origen.

Una función puede no ser par ni impar.

5.15. Límite de una función

Límite de una función en un punto Trata del valor al que se acercan las imágenes cuando la variable independiente se aproxima a un cierto valor x_0. Lo normal es que las imágenes se acerquen a la imagen de x_0, pero no siempre es así.

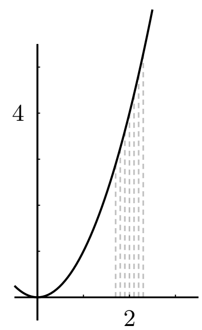
Una función $y = f(x)$ tiene por límite a L cuando x tiende a x_0 si al acercarse x a x_0, entonces la y se acerca a L. Esto se escribe : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$

que se lee: "límite cuando x tiende a x_0 de $f(x)$ es igual a L.

Ejemplos

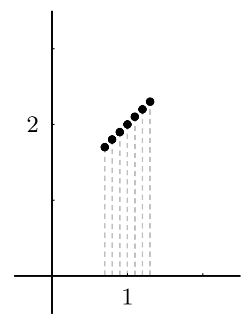
La función $y = x^2$ cuando $x \to 2$

$$\lim_{x \to 2} x^2 = \left\{ \begin{array}{c|ccc} x & 1'9 & 1'99 & 1'999 \\ \hline y & 3'61 & 3'96 & 3'99 \\ x & 2'1 & 2'01 & 2'001 \\ \hline y & 4'41 & 4'04 & 4'004 \end{array} \right\} = 4$$



La función $y = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ cuando $x \to 1$

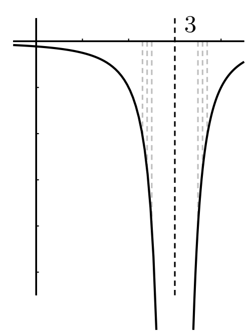
$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \left\{ \begin{array}{c|ccc} x & 0'9 & 0'99 & 0'999 \\ \hline y & 1'9 & 1'99 & 1'999 \\ x & 1'1 & 1'01 & 1'001 \\ \hline y & 2'1 & 2'01 & 2'001 \end{array} \right\} = 2$$



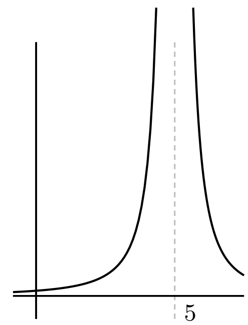
No hay límite la función se va a infinito: (nota: **asíntota** es una recta a la cual se acerca la función en el infinito).

Una función $y = f(x)$ tiende a infinito cuando x tiende a x_0 si al acercarse x a x_0, la y se hace enormemente grande, hay asíntota vertical.

$$\lim_{x \to 3} \frac{-1}{(x - 3)^2} = \left\{ \begin{array}{c|ccc} x & 2'5 & 2'7 & 2'9 \\ \hline y & -4 & -11'1 & -100 \\ x & 3'5 & 3'3 & 3'1 \\ \hline y & -4 & -11'1 & -100 \end{array} \right\} = -\infty$$



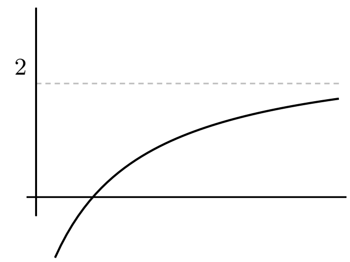
$$\lim_{x\to 5} \frac{1}{(x-5)^2} = \infty$$



Límite cuando x tiende a infinito:

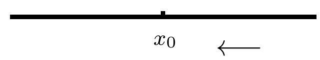
$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x-3}{x+7} = 2;$$

si es un número hay asíntota horizontal;
Análogamente: límite cuando x tiende a $-\infty$

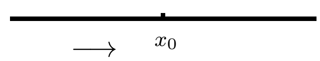


Límites laterales Resultan de acercarse x a x_0 sólo por uno de los lados:

Si nos acercamos con valores mayores que x_0 se llama límite lateral por la derecha y se escribe: $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$.



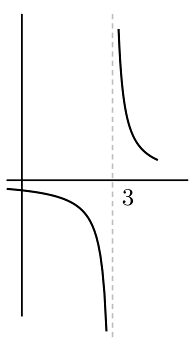
Para la izquierda es $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$



Ejemplos

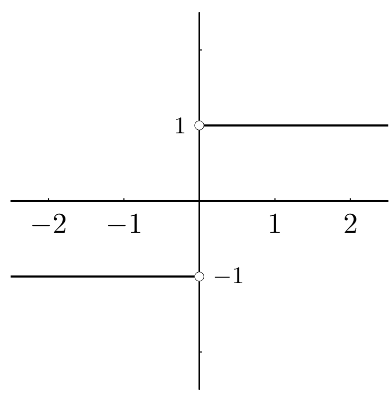
a) $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{1}{x-3} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{1}{x-3} = +\infty$



b) $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{|x|}{x} = -1$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{|x|}{x} = 1$



Ejercicio Calcular dando valores el límite:

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{2^x} =$

5.16. Cálculo de límites de funciones

1ª regla Sustituir la x por el valor al cual se acerca x_0. El número que resulta es el límite (salvo indeterminación). Ejemplos :

$$\lim_{x\to 2} 3x^2 - 5 = 7; \qquad \lim_{x\to -\infty} 3x^2 - 5 = \infty$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x-5x^2}{6x-4}=0; \qquad \lim_{x\to 0}\left(\frac{3}{5x+1}\right)^x=\left\{3^0\right\}=1$$

2^a regla: Límite de un polinomio partido por otro polinomio

1. Cuando x tiende a infinito: Este límite se calcula a partir de las mayores potencias que dan el orden del infinito.

    a) Cuando el grado del numerador es menor que el del denominador el denominador es más potente el límite es 0.
    $\lim_{x\to\infty}\frac{3x-5}{x^2+1}=$ dividiendo por x $=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{5}{x}}{x+\frac{1}{x}}=0$

    b) Cuando el grado del numerador es igual que el del denominador son igualmente potentes el límite es el cociente de los coeficientes de mayor grado.
    $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-5}{7x^2+x}=$ dividiendo por $x^2=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{5}{x^2}}{7+\frac{1}{x}}=\frac{3}{7}$

    c) Cuando el grado del numerador es mayor que el del denominador el numerador es más potente el límite es $\pm\infty$. En este caso el signo del infinito se deduce del signo de los coeficientes de mayor grado del numerador y del denominador.
    $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{3x-5}=$ dividiendo por x $=\lim_{x\to\infty}\frac{x+\frac{1}{x}}{3-\frac{5}{x}}=\infty$

2. Cuando x tiende a menos infinito es igual que cuando x tiende a infinito. Sólo hay que preocuparse del signo cuando el límite resulta infinito.

    Ejemplo: $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-3x+2}{8x-1}=-\infty$

3. Cuando x tiende a 0 el límite se calcula sacando factor común y simplificando.

    Ejemplo: $\lim_{x\to 0}\frac{3x^2-5x}{3x+10x^3}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{x(3x-5)}{x(3+10x^2)}=\frac{3x-5}{3+10x^2}=-\frac{5}{3}$

    Ejemplo: Si sale infinito, para saber el signo, en este caso hay que hallar los límites laterales.

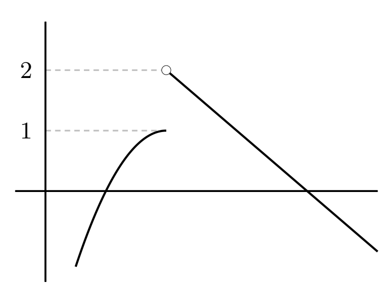
    $\lim_{x\to 0}\frac{3x^2-5}{3x+10x^3}=\left\{\frac{-5}{0}\right\}=\pm\infty$

    $\lim_{x\to 0^-}\frac{3x^2-5}{3x+10x^3}=\left\{\frac{-5}{-0}\right\}=\infty; \qquad \lim_{x\to 0^+}\frac{3x^2-5}{3x+10x^3}=\left\{\frac{-5}{0}\right\}=-\infty$

4. Cuando x tiende a a, siendo a un número distinto de 0, si resulta indeterminación lo resolveremos por L'Hôpital cuando demos derivadas.

5.17. Continuidad de funciones

Una función es continua cuando su gráfica es continua, no da saltos. Dicho con precisión: una función $f(x)$ es continua en un punto (no aislado) x_0, cuando el límite de la función en x_0 es igual al valor de la función en x_0.



Por ejemplo: $y=x^2$ es continua siempre, en cambio $y=\frac{1}{x-3}$ es discontinua en $x=3$.

En la práctica una función no es continua cuando el límite por la derecha es distinto del límite por la izquierda o hay una asíntota vertical.

Problemas de funciones I

1. Hallar las imágenes por $f(x) = 3x^2 - 1$

   a) de 5; b) de -1; c) de h ; d) de $x_0 + h$; e) de $\frac{x+5}{7}$

   Solución: a) 74, b)2, c) $3h^2 - 1$, d) $3(x_0 + h) - 1$, e) $3\left(\frac{x+5}{7}\right)^2 - 1$

2. Dada la función $f(x) = 3^x$. Hallar las imágenes de 0, 1/2, 2, -1 y 4. Ver de qué es imagen: 3 y 81

3. Hallar de quién es imagen por la función $y = x^2 + 2x - 15$

   a) y = 0; b) y = -11 c) y = -15

   Solución: a) $3, -5$, b) $-1 \pm \sqrt{5}$, c) $0, -2$

4. Dada la función $f(x) = x^2 - 2x + 3$, hallar las expresiones: a) $f(5 + h) - f(5)$, b) $f(x_0 + h) - f(x_0)$

5. Hallar el dominio de a) $y = \dfrac{2}{1 - 3x^2}$, b) $y = \dfrac{x}{\sqrt{4 - x^2}}$

   Solución: a) R excepto $\pm\sqrt{1/3}$, b) $]-2, 2[$

6. Se quiere construir un pozo en forma cilíndrica de 2 m de diámetro. Expresar el volumen de agua que cabe en el pozo en función de su profundidad h.

   Solución: $f(x) = \pi . x$

7. Representar gráficamente

   $3x - y = 2$

8. Representar gráficamente

   $4x - 5y - 24 = 0$

9. Representar gráficamente

   $y = \dfrac{1}{4}x^2 - 16$

10. Representar gráficamente

    $y = -x^2 - 5x - 6$

11. Representar gráficamente

    $y = (x - 3)(1 + x)$

12. Representar gráficamente

    $y = (x - 3)(5 - x)$

13. Representar gráficamente

    $y = 4 + x^2$

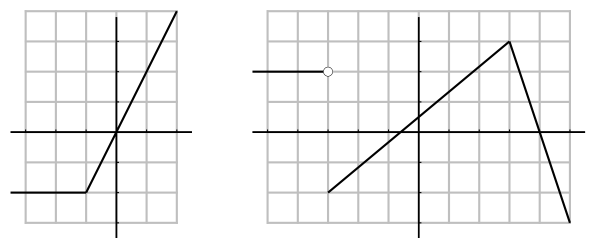
14. Representar gráficamente

    $$y = \begin{cases} x + 1 & para \quad x < 2 \\ -x + 2 & para \quad x \geq 2 \end{cases}$$

15. Representar gráficamente

    $$y = \begin{cases} 2x + 1 & para \quad x \leq -2 \\ x^2 + 4x + 4 & para \quad x > -2 \end{cases}$$

16. Hallar la expresión de las funciones de gráficas

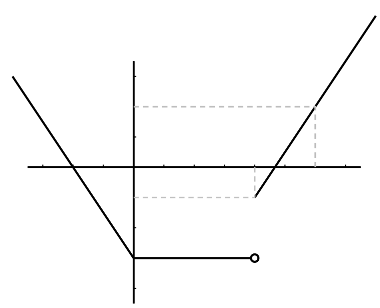


    Solución:

    a) $f(x) = \begin{cases} -2 & si \quad x \leq -1 \\ 2x & si \quad -1 < x \end{cases}$

    b) $f(x) = \begin{cases} 2 & si \quad x < -3 \\ \frac{5x+3}{6} & si \quad -3 \leq x \leq 3 \\ -3x + 12 & si \quad 3 < x \end{cases}$

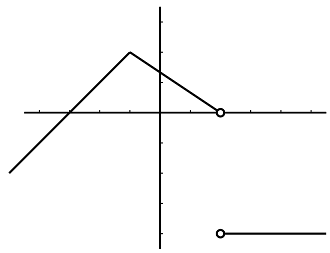
17. Hallar la expresión de la función de gráfica:



    Solución:

    $$f(x) = \begin{cases} -\frac{3}{2}x - 3 & si \quad x < 0 \\ -3 & si \quad 0 \leq x < 4 \\ \frac{3}{2}x - 7 & si \quad x \geq 4 \end{cases}$$

18. Hallar la expresión de la función de gráfica:



Solución:

$$f(x) = \begin{cases} x+3 & si \quad x<-1 \\ -\frac{2}{3}x+\frac{4}{3} & si \quad -1 \le x < 2 \\ -4 & si \quad x>2 \end{cases}$$

19. Sabiendo que el cambio actual del dólar está a 110 rupias y que el banco cobra una comisión del 0'5 %, escribir las funciones que permiten pasar del valor actual de una moneda a otra.

Solución: Cambio de rupias a \$, $y = \frac{x-0'005x}{110}$; cambio de \$ a rupias $y = (x-0'005x)\cdot 110$

20. Representar $f(x) = \begin{cases} 3-x & si \quad x \le 3 \\ 2x-6 & si \quad 3<x\le 5 \\ 4-x & si \quad 5<x \end{cases}$

21. Representar a) $f(x) = |x^2-3x|$, b) $g(x) = x^2-3|x|+2$

22. En una máquina de calcular programable el programa B multiplica por 2 la cantidad introducida y le suma 1. Hallar el resultado de aplicar 4 veces el programa B.

Solución: $B(B(B(B(x)))) = 16x+15$

23. Representar

$$f(x) = \begin{cases} 2x-3 & si \quad x \le -2 \\ x^2-6 & si \quad -2<x\le 4 \\ -x-1 & si \quad x>4 \end{cases}$$

24. Se sabe que 210^0F equivalen a 100^0C y que 0^0 equivalen a 32^0F. Hallar las funciones lineales que dan la equivalencia de los distintos tipos de grados.

Solución: x ^{0}C, y ^{0}F, $y = ax+b, y = \frac{178}{100}x+32$

25. Un cliente de una compañía tiene una cuota fija mensual de 7'51 euros. Los primeros 250 kw.h consumidos le cuestan a 0'04 euros cada uno; los siguientes hasta 900, a 0'03 euros y los demás a 0'02 euros. Dibújese la función que da el importe del recibo, según los kw.h consumidos. Prepárese la factura, salvo impuestos, de un cliente que consumió: a) 200 kw.h; b) 700; c) 1.000; d) ningún kw.h. e) Otra compañía, con la misma cuota fija, factura todos los kw a 0'03 euros. ¿Cuánto debe consumirse para que los recibos de ambas compañías se eleven a la misma cantidad?

Solución: $f(x) =$

$$\begin{cases} 7'51 & si \quad x=0 \\ 7'51+0'04x & si \quad 0<x\le 250 \\ 7'51+0'04{,}250+0'03(x-250) & si \quad 250<x\le 900 \\ 7'51+0'04{,}250+0'03{,}650+0'02(x-900) & si \quad 900<x \end{cases}$$

26. Suponiendo que en una cabina telefónica los tres primeros minutos de conferencia cuestan 10 céntimos y otras 5 cts. por cada tres minutos más o fracción: a) ¿Cuánto cuesta una conferencia de 7 min.? ¿Y de 8 min. 30 seg.? b) Representar la función que da el importe de la conferencia en función del tiempo. c) ¿Existe su función inversa?. d) Si han cobrado 38 cts. por una conferencia ¿qué puedes decir del tiempo que ha durado?

Solución:

$$f(x) = \begin{cases} 10 & si \quad t\in]0,3] \\ 15 & si \quad t\in]3,6] \\ 20 & si \quad t\in]6,9] \\ 25 & si \quad t\in]9,12] \\ \dots \end{cases}, \quad f(7) = 20 \text{ cts},$$

$f(8'5) = 20$ cts, no hay inversa por no ser inyectiva, ha durado entre 18 y 21 minutos.

27. Dadas las funciones

$f(x) = \dfrac{3x+2}{5}$; $g(x) = 6x^2-1$. Hallar:

a) $f.g$; b) $f\circ g$; c) $g[f(x)]$; d) f^2-g ; e) f^2/g

Solución: a) $\frac{18x^3+12x^2-3x-2}{5}$, b) $\frac{18x^2-1}{5}$, c) $\frac{54x^2+72x-1}{25}$, d) $\frac{-141x^2+12x+29}{25}$, e) $\frac{9x^2+12x+4}{150x^2-25}$

28. Dadas las funciones

$f: \quad y = 5-2x; \qquad g: \quad y = \dfrac{1}{x}$. Hallar:

a) $f\circ g$; b) $g\circ f$; c) inversa de f; d) inversa de g; e) gráfica de f y f^{-1}

29. Dadas las funciones
$f: \quad y = \dfrac{5-3x}{x-7}; \qquad g: \quad y = x^2$. Hallar:
a) $f \circ g$; b) imagen de $3+h$ por $g \circ f$; c) inversa de f
Solución: a) $\frac{5-3x^2}{x^2-7}$, b) $\left(\frac{-4-3h}{h-4}\right)^2$, c) $\frac{7x+5}{x+3}$

30. Decir si los puntos $(2,3), (1,-1), (4,-3), (t, 6t-7)$; pertenecen a la gráfica de la función $y = 6x - 7$. Dibujar y escribir su función inversa.

31. Representar $y = |2x+1|$

32. Representar $y = |2x - x^2|$

33. Representar $y = |2x^2 - 5x + 3|$

34. Representar $y = 2x^2 - 5|x| + 3$

35. Representar $y = 6 - |x| - x^2$

36. Representar $y = |6 - x - x^2|$

37. Representar $y = |(x-5)(x+2)|$

38. Representar $y = (|x| - 5)(x+2)$

39. Dadas las funciones $f: \quad y = x^2; \qquad g: \quad y = 3x+2$. Hallar: a) $f \circ g$; b) $f \circ f$; c) inversa de g ; d) gráficas de g y g^{-1}

40. Hallar la función suma de las funciones
$f(x) = \begin{cases} x+4 & si \quad x < 0 \\ 2x & si \quad 0 \le x \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} -x+1 & si \quad x < 2 \\ 3 & si \quad x \ge 2 \end{cases}$
Solución: $(f+g)(x) = \begin{cases} 5 & si \quad x < 0 \\ x+1 & si \quad 0 \le x < 2 \\ 2x+3 & si \quad 2 \le x \end{cases}$

41. Hallar utilizando tabla de valores:
límite de $y = 3x+2$ cuando $x \to 5$
Solución:
$\lim\limits_{x\to 2}(3x+2) = \left\{ \begin{array}{c|ccc} x & 4'9 & 4'99 & 4'999 \\ \hline y & 16'7 & 16'97 & 16'997 \end{array} \right\} = 17$

42. Dibujar las rectas y hallar su ecuación explícita:
a) Recta que pasa por el punto $(5,-2)$ y tiene de pendiente $\dfrac{-1}{3}$
b) Recta que tiene 5 como ordenada en el origen y forma con el eje de las "x" positivas un ángulo de 53^0
c) Recta que pasa por el punto $(2,-4)$ y tiene la dirección del vector $\vec{x} = (5,-2)$
d) Recta $3x - 2y - 15 = 0$

43. Hallar utilizando tabla de valores:
límite de $y = \dfrac{x^2-4}{x+2}$ cuando $x \to -2$
Solución:
$\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x+2} = \left\{ \begin{array}{c|ccccc} x & -1'9 & -1'99 & -1'999 & -2'01 & -2'001 \\ \hline y & -3'9 & -3'99 & -3'999 & -4'01 & -4'001 \end{array} \right\} = -4$

44. Hallar utilizando tabla de valores:
a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-2x}{x-2}$
b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{x-2}$
c) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{3}{(x-2)^2}$
d) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-2x}{2}$
e) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x}{2^x}$

45. Dada la función $\dfrac{x^2-5x+6x^3}{3x^2-5x-12x^3}$. Hallar:
a) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$; b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; c) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$;
Solución: a) $-1/2$, b) $-1/2$, c) 1

46. Siendo $f: \ y = x^2 - 3x$, hallar: $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}$
Solución: 1

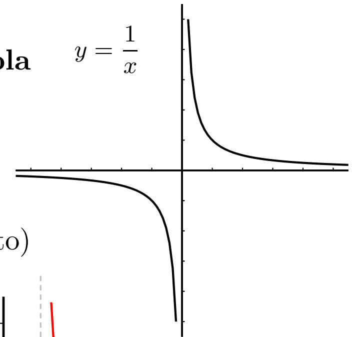
47. Hallar la intersección de la parábola $y = 6x^2 - 3x$ y la recta que pasa por los puntos $(2,0), (-1,4)$

6. FUNCIONES II

6.1. Función de proporcionalidad inversa

Ejercicio: Dado un triángulo de 6 cm^2 de área, representar la función $y = f(x)$ donde x es la base e y es la altura.

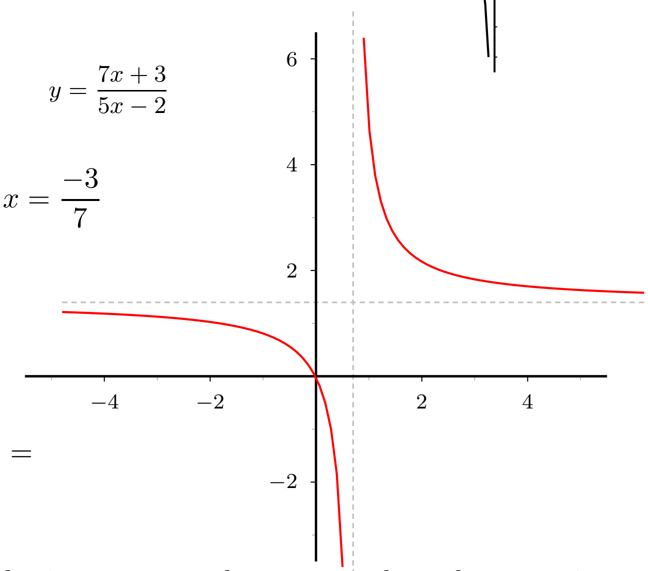
Es el caso más sencillo de función racional. Su gráfica es una **hipérbola** con asíntotas paralelas a los ejes



Tiene de ecuación $y = \dfrac{\text{polinomio grado 1}}{\text{polinomio grado 1}}$; $\qquad y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$

Para representarla basta hallar los puntos de corte (o algún otro punto) y las asíntotas vertical y horizontal.

Ejemplo Representar $y = \dfrac{7x+3}{5x-2}$



Puntos de corte
Con OX se hace $y = 0$: resulta $7x + 3 = 0 \quad x = \dfrac{-3}{7}$

Con OY se hace $x = 0$: resulta $y = \dfrac{-3}{2}$

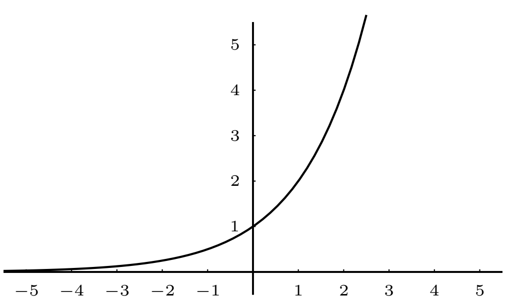
Asíntotas
asíntota vertical, anulamos el denominador:
$5x - 2 = 0 \quad x = \dfrac{2}{5}$;
asíntota horizontal $y = n$, $\qquad n = \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \dfrac{7x+3}{5x-2} = \dfrac{7}{5}; \quad y = \dfrac{7}{5}$

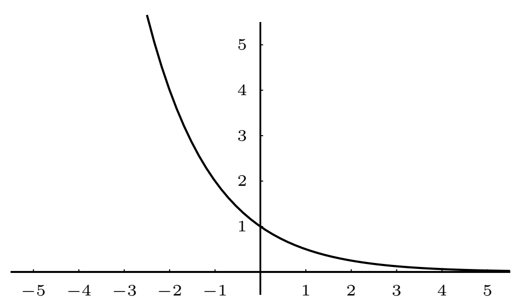
Hasta ahora hemos visto funciones algebraicas que son las que resultan de operaciones con polinomios: productos, cocientes, raíces, etc. Veremos ahora funciones trascendentes.

6.2. Función exponencial

Es la función en la que la variable independiente hace el papel de exponente de una potencia cuya base es un número mayor que 0.

Por ejemplo $y = 2^x$, $\qquad y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x \left\{= (0'5)^x = \dfrac{1}{2^x} = 2^{-x}\right\}$



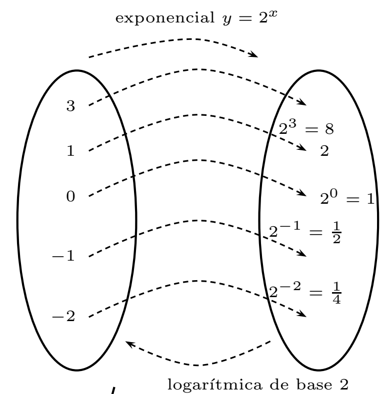


$y = a^x$ con $a > 1$
Es creciente.
Es continua.
El dominio son todos los números reales.
El rango son todos los números reales positivos sin el 0.
límite cuando x tiende a $-\infty$ es 0.
límite cuando x tiende a ∞ es ∞ .

$y = a^x$ con $a < 1$
Es decreciente.
Es continua.
El dominio son todos los números reales.
El rango son todos los números reales positivos sin el 0.
límite cuando x tiende a $-\infty$ es ∞
límite cuando x tiende a ∞ es 0

Observaciones:

- No hay que confundir la función exponencial con la función potencial. En la función exponencial la base es constante y el exponente variable, por ejemplo 2^x, y en la función potencial es al contrario, la base es variable y el exponente constante, por ejemplo x^2. (También existe la función potencio-exponencial x^x)
- La función exponencial más famosa es e^x.



6.3. Función logarítmica

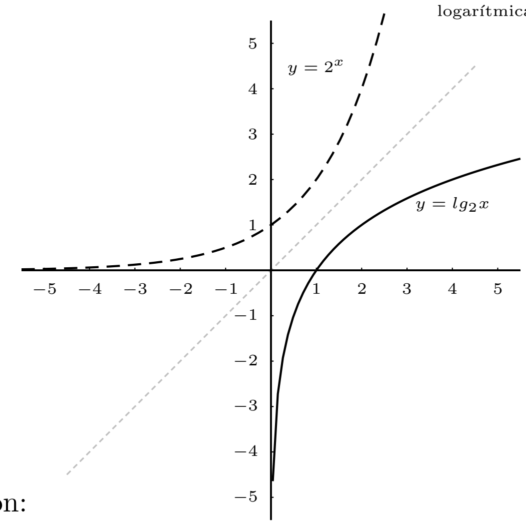
La función logarítmica es la inversa de la función exponencial. Ejemplo: para la función exponencial $y = 2^x$:

$y = 2^x$

x	0	1	2	3	-1	-2
y	1	2	4	8	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

$y = \log_2 x$

x	1	2	4	8	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
y	0	1	2	3	-1	-2

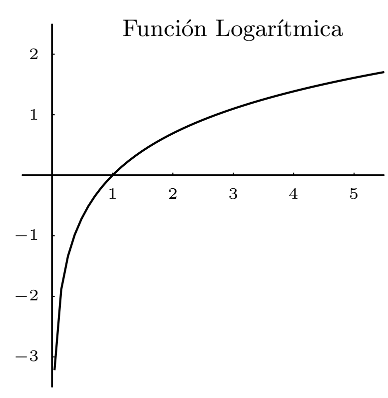


Su gráfica es por tanto simétrica de la exponencial respecto a la bisectriz del primer cuadrante. Entonces $\log_2 x$ quiere decir: el logaritmo en base 2 de x es el exponente al que hay que elevar el 2 para obtener x.

Es decir la función logarítmica asocia a un numero dado el exponente al que tengo que elevar la base para obtener el número dado

Observaciones:

- Las funciones logarítmicas más famosas son:
  a) **Logaritmo decimal**, en base 10, se escribe $y = \log x$ (logaritmo decimal de x). Es la inversa de la función exponencial $y = 10^x$.
  b) **Logaritmo neperiano**, en base e, se escribe $y = \ln x$ (logaritmo neperiano de x). Es la inversa de la función exponencial $y = e^x$.
- Como vemos en el dominio en la gráfica no existe logaritmo de un número negativo.
- Los logaritmos sirven para bajar incógnitas de exponentes pues: el logaritmo de una potencia es igual al exponente por el logaritmo de la base. Ejemplo: $\ln 18^{35} = 35 \ln 18$



Ejemplo Resolver $3^{8x-2} = 15$

Tomando logaritmos, el logaritmo del primer miembro será igual al logaritmo del segundo miembro:

$\ln 3^{8x-2} = \ln 15$, $(8x-2)\ln 3 = \ln 15$, $8x-2 = \dfrac{\ln 15}{\ln 3}$, $8x-2 = 2'46$, $8x = 2'46+2$, $x = 0'55$

- la parte entera del logaritmo decimal de un número nos dice de qué orden de unidades es el número: centenas, diezmilésimas, etc

  $\log 8976 = 3'9$ es 3 luego son miles, cuatro cifras; $\log 1111111111 = 9'04$, diez cifras luego son miles de millón; $\log 0'36 = -0'4$ çero coma”, décimas; $\log 0'00000897 = -5'4$ cinco ceros después de la coma, millonésimas; $\log 0'00045 = -3'3$ tres ceros después de la coma, diezmilésimas.

Ejemplos

1. Hallar la inversa de $y = 7 - 3e^{6x+1}$

   $x = 7 - 3e^{6y+1}$; $3e^{6y+1} = 7 - x$; $e^{6y+1} = \dfrac{7-x}{3}$; $\ln e^{6y+1} = \ln \dfrac{7-x}{3}$;

   $(6y+1)\ln e = \ln \dfrac{7-x}{3}$; $6y+1 = \ln \dfrac{7-x}{3}$; $6y = \ln \dfrac{7-x}{3} - 1$; $y = \dfrac{\ln \frac{7-x}{3} - 1}{6}$

2. Hallar la inversa de $y = \dfrac{\ln(3x+2)+7}{2}$

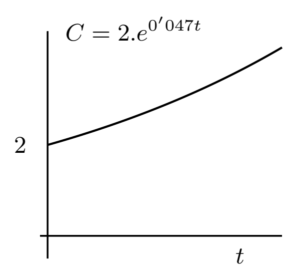
   $x = \dfrac{\ln(3y+2)+7}{2}$; $2x = \ln(3y+2)+7$; $2x-7 = \ln(3y+2)$; $e^{\ln(3y+2)} = e^{2x-7}$;

   $3y+2 = e^{2x-7}$; $3y = e^{2x-7} - 2$; $y = \dfrac{e^{2x-7}-2}{3}$

3. (Ejercicio): Calcular $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{10x}{e^x - 1}$

Ejemplo Sabiendo que si la capitalización es continua, C_0 pesetas durante t años, a un interés del $R\,\%$ anual, dan como capital final C : $C = C_0.e^{it}$ con $i = \dfrac{R}{100}$.

Para un capital inicial de dos millones de euros, a un interés anual del 4’7 % :
a) Representar el capital acumulado en función del tiempo.
b) Hallar el tiempo que tarda en doblarse el capital inicial.



a) $C = 2.e^{0'047t}$
b) $4 = 2.e^{0'047t}$
$2 = e^{0'047t}$ tomando logaritmos: $\ln 2 = 0'047.t.\ln e$
$t = \dfrac{\ln 2}{0'047} = 14'747$ años $\approx$ 14 años y 9 meses

Problemas de funciones II

1. Representar: $y = \dfrac{2}{3-x}$

2. Representar: $y = \dfrac{4x+18}{3x-9}$

3. Representar: $y = \dfrac{3x}{x+5}$

4. Hallar la intersección de la recta $y = 2x+4$ y la hipérbola $y = \dfrac{3x+8}{6x+2}$

   Solución: $(-25/12, -1/6); (0, 4)$

5. El área de un triángulo rectángulo es 20 cm^2. Escribir la función que nos da la altura en función de la base. Representarla gráficamente. Buscar dos puntos de esta gráfica y dibujar el triángulo en cada caso.

   Solución: $y = 40/x$

6. Una población que tenía inicialmente 4500 individuos va creciendo a un ritmo del 8a) ¿Cuántos individuos habrá dentro de un año? ¿Y dentro de 5 años? b) Halla la función que nos da el número de individuos según los años transcurridos.

7. Hallar la gráfica de la función $y = \log_3 x$, sabiendo que es la función inversa de $y = 3^x$. Deducir sus características: dominio, crecimiento, etc.

8. Calcular los siguientes logaritmos:

   a) $\log_2 64$; b) $\log 100\dot{0}00\dot{0}00$; c) $\log_5 125$; d) $\ln 781'98$; e) $\ln 689$; f) $\log 0'00001$; g) $\log 10^8$; h) $\ln e^7$ i) $\ln 1/e$

   Solución: a) 6, b) 8, c) 3, d) 6'66, e) 6'53, f) -5, g) 8, h) 7, k) -1

   Resolver las siguientes ecuaciones:

9. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{3x-4} = 32$

   Solución: $x = -1/3$

10. $2'7^{2x+1} = 32$

    Solución: $x = 1'24$

11. $4 \cdot 10^{5x-2} - 3 = \dfrac{1}{2}$

    Solución: $x = 0'3616$

12. Hallar la inversa de: $y = 2 \cdot e^{3x+5}$

    Solución: $y = \dfrac{\ln \frac{x}{2} - 5}{3}$

13. Hallar la inversa de: $y = 4 - 5\ln(3+x)$

14. Una empresa de componentes electrónicos sacó al mercado un nuevo microprocesador. La proporción P de fabricantes de ordenadores que lo utilizan al cabo de t años es $P = \dfrac{1}{1+C.e^{kt}}$. En el instante $t = 0$, sólo lo utilizaban el 2 %. Suponiendo que hoy, a cuatro años de su aparición, lo usan ya el 50 % de los fabricantes, calcúlense las constantes C y k. Después, averígüese cuánto tiempo debería transcurrir para que lo usaran el 90 % de los fabricantes.

    Solución: $k = -0'97, C = 49$ 6'27 años

15. La fórmula $P(t) = P_0 e^{kt}$ expresa el valor de la población $P(t)$ al cabo de t años, para una ciudad, con una tasa anual de crecimiento K, constante. a) ¿Qué significado tiene P_0? b) En 1.985, dos ciudades A y B poseían 18'8 y 17'3 millones de habitantes respectivamente. Para el año 2.000, si se mantienen las tasas anuales de crecimiento de ambas ciudades, se estima que tendrán 20'2 y 25'8 millones de habitantes respectivamente. Hallar las tasas de crecimiento de las ciudades A y B, y calcular el año en que las dos ciudades tendrán la misma población.

    Solución: a) P_0 población inicial, b) ciudad A: $P(15) = 18'8.e^{15k_A} = 20'2, \quad 15.k_A = \ln \frac{20'2}{18'8}, k_A = 0'0047$, de igual modo $k_B = 0'026$, las poblaciones serán iguales para $t = 3'81$

7. DERIVADAS

7.1. Derivada de una función en un punto

Sea una función real $f(x)$ definimos derivada de la función $f(x)$ en un punto x_0 como:

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}}$$

cuando este límite es un número.

Ejemplos

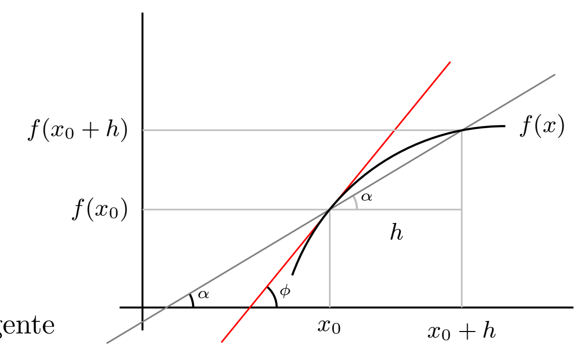
1. Hallar la derivada de $y = x^2 + 3$ en $x_0 = 5$

$$f'(5) = \lim_{h \to 0} \frac{f(5+h) - f(5)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(5+h)^2 + 3 - (5^2 + 3)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 + 10h}{h} = 10$$

2. Hallar la derivada de $y = \dfrac{1}{x+2}$ en $x_0 = 5$

$$f'(5) = \lim_{h \to 0} \frac{f(5+h) - f(5)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{5+h+2} - \frac{1}{5+2}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-h}{h(7+h)7} = \frac{-1}{49}$$

7.2. Interpretación gráfica de la derivada



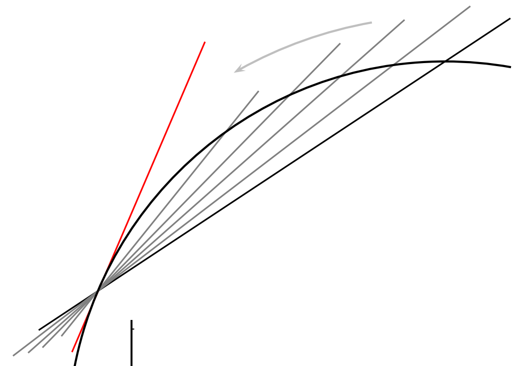
Llamando a h incremento de x

$f(x_0 + h) - f(x_0)$ incremento de y, resulta:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \tan \alpha$$

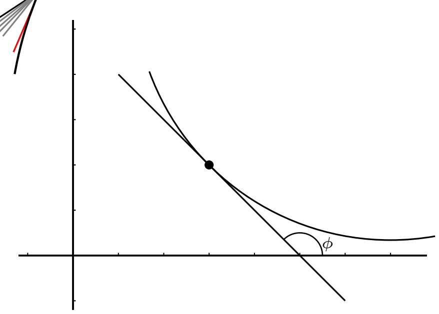
cuando $h \to 0$ la recta secante PQ tiende a la recta tangente en x_0 y los ángulos α tienden al ángulo ϕ, se tiene:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{\alpha \to \phi} \tan \alpha = \tan \phi = m$$



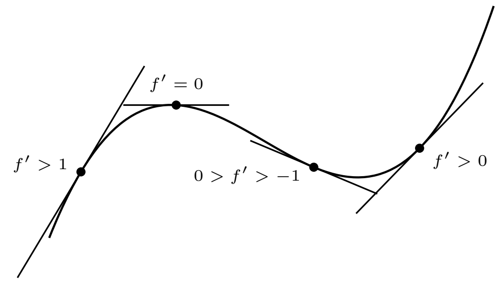
Se llama pendiente de una recta a la tangente del ángulo que forma con el eje de las x positivas. Por tanto:

La derivada de una función en un punto es la pendiente de la recta tangente en ese punto.



Por tanto la derivada de una función en un punto dice como crece una función y lo hace midiendo la inclinación de la recta tangente pues la derivada es la pendiente de la recta tangente.

$$f'(x_0) = \tan \phi = m$$



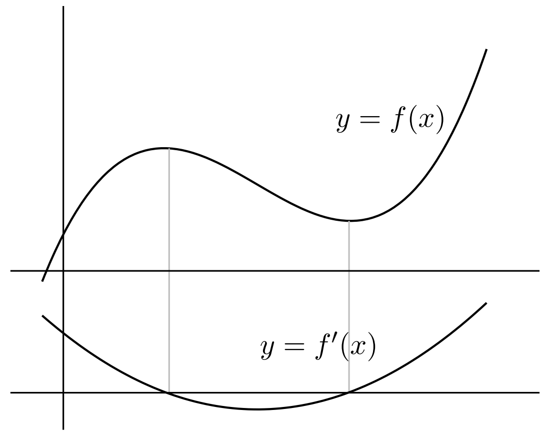
Según la derivada sea positiva o negativa la función sube o baja.

Cuanto mayor es la derivada en valor absoluto más vertical es la gráfica.

7.3. Función derivada

Si una función $y = f(x)$ definida en un dominio D tiene derivada en cada punto de D resulta una función que se llama función derivada y se representa $y' = f'(x)$
También se representa la función derivada por

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}f(x) = [f(x)]'$$



Ejemplo Hallar la derivadas de la función: $y = x^2 + 3$
$f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} =$
$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(x+h)^2 + 3 - (x^2+3)}{h} = 2x$
$y' = 2x$ es la función derivada de $y = x^2 + 3$

Interpretación de la derivada Por ejemplo la velocidad es rapidez de variación del espacio con respecto al tiempo: $v(t) = \dfrac{de}{dt}$.

La aceleración es el ritmo de cambio de la velocidad con respecto al tiempo: $a(t) = \dfrac{dv}{dt}$
La velocidad de crecimiento de una población de bacterias sería la variación del número de individuos con respecto al tiempo

7.4. Cuadro de derivadas

Reglas de derivación:

$(c)' = 0$	la derivada de una constante es 0
$(x^n)' = n.x^{n-1}$	para derivar una potencia se baja el exponente y se le resta una unidad. En particular: $(x)' = 1$; $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ la derivada de una raíz es 1 partido por dos veces la raíz; $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = \dfrac{-1}{x^2}$
$(f+g)' = f' + g'$	la derivada de la suma es la suma de las derivadas
$(f.g)' = f'g + fg'$	la derivada de un producto es la derivada del 1^0 por el 2^0 más el 1^0 por la derivada del 2^0
$(c.f)' = c.f'$	la derivada de una constante por una función es la constante por la derivada de la función

$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ la derivada de un cociente es la derivada del numerador por el denominador menos el numerador por la derivada del denominador, partido por el denominador al cuadrado

$(g[f(x)]' = g'[f(x)].f'(x)$ la derivada de la función compuesta, función de función, es la derivada de la exterior en la interior, por la derivada de la interior.

Derivadas de funciones elementales:

Exponencial: $(e^x)' = e^x$ para otra base: $(a^x)' = a^x.La$

Logarítmica: $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ para otra base: $(\log_a x)' = \frac{1}{x.\ln a}$

Ejemplos

1. $y = x^2; \quad y' = 2x$
2. $y = 2x^3; \quad y' = 6x^2$
3. $y = 3x^4 - 2x; \quad y' = 12x^3 - 2$
4. $y = (x^2 - 3)(2x + 3x^5); \quad y' = 2x(2x + 3x^5) + (x^2 - 3)(2 + 15x^4)$
5. $y = \frac{2x - 3x^5}{7x - 5}; \quad y' = \frac{(2 - 15x^4)(7x - 5) - (2x - 3x^5)7}{(7x - 5)^2}$
6. $y = \frac{1}{x^2}$; poniendo $y = x^{-2}$ resulta: $y' = -2x^{-3} = \frac{-2}{x^3}$
7. $y = \sqrt{x}$; poniendo $y = x^{1/2}$ resulta: $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
8. $y = (x^2 + 1)e^x; \quad y' = 2xe^x + (x^2 + 1)e^x$
9. $y = \sqrt[3]{x}$; poniendo: $y = x^{1/3}$ resulta: $y' = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$
10. $y = 7\ln x; \quad y' = 7\frac{1}{x}$
11. $y = (3x^2 - 5)\ln x; \quad y' = 6x\ln x + \frac{3x^2 - 5}{x}$
12. $y = e^x \ln x; \quad y' = e^x \ln x + \frac{e^x}{x}$
13. $y = \frac{5x^4 - 3e^x}{1 - x}; \quad y' = \frac{(20x^3 - 3e^x)(1 - x) - (5x^4 - 3e^x)(-1)}{(1 - x)^2}$
14. $y = (7x - 5)^4; \quad y' = 4(7x - 5)^3 \cdot 7$
15. $y = \ln(2x + 3); \quad y' = \frac{1}{2x + 3} \cdot 2 = \frac{2}{2x + 3}$
16. $y = 4\ln(2 - x); \quad y' = \frac{4 \cdot (-1)}{2 - x} = \frac{-4}{2 - x}$

17. $y = e^{5-4x}; \quad y' = e^{5-4x} \cdot (-4)$

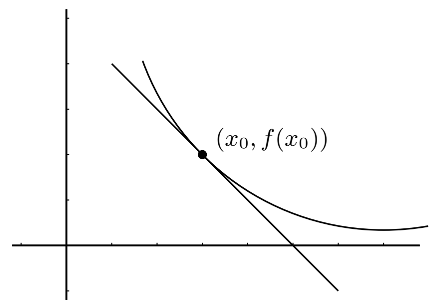
18. $y = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}; \quad y' = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}(-x)$

19. $y = \ln(x^2 + 3x); \quad y' = \dfrac{1}{x^2 + 3x}(2x + 3) = \dfrac{2x + 3}{x^2 + 3x}$

20. $y = \dfrac{e^{2x}}{x}; \quad y' = \dfrac{e^{2x} \cdot 2 \cdot x - e^{2x} \cdot 1}{x^2}$

21. $y = (x^3 - 5x)(\ln(1 - x); \quad y' = (3x^2 - 5)(\ln(1 - x) + (x^3 - 5x)\dfrac{-1}{1 - x}$

7.5. Recta tangente a una curva



Como la ecuación de una recta que pasa por el punto (x_0, y_0) y tiene de pendiente m es: $y - y_0 = m(x - x_0)$, si queremos calcular la recta tangente a $f(x)$ en el punto x_0, será:

$y_0 = f(x_0)$

$m = f'(x_0)$

Ejemplo Hallar la tangente a la curva $y = x^2 - 5x$ en el punto de abcisa 7.
$f'(x) = 2x - 5, \quad m = f'(7) = 9, \quad f(7) = 14$
Recta tangente $y - 14 = 9(x - 7)$

Integral de una función Integrar es lo contrario de derivar, por ejemplo la función: $y = 2x$ es la derivada de la función $y = x^2 + 7$.

Ejemplo Hallar la función cuya segunda derivada sea $f''(x) = x+3$ y tiene un mínimo en el punto $(2, 0)$

Como $f''(x) = x + 3$ es la derivada de un polinomio de 2^0 grado que a su vez lo es de uno de grado 3; buscamos una función del tipo: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Derivamos: $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

Derivamos de nuevo: $f''(x) = 6ax + 2b$

Luego: $f''(x) = 6ax + 2b = x + 3$ identificando coeficientes: $\begin{array}{ll} 6a = 1, & a = \dfrac{1}{6} \\ 2b = 3, & b = \dfrac{3}{2} \end{array}$

Sustituimos estos dos valores en f' y f':

$f(x) = \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{3x^2}{2} + cx + d$

$f'(x) = \dfrac{3x^2}{6} + \dfrac{2 \cdot 3x}{2} + c = \dfrac{x^2}{2} + 3x + c$

Ahora imponemos la condición de que tiene un mínimo en $(2, 0)$, lo que se traduce en las condiciones:

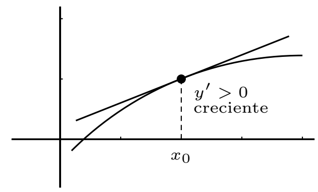
- Pasa por $(2, 0)$: $\quad f(2) = 0; \quad \dfrac{2^3}{6} + \dfrac{3 \cdot 2^2}{2} + c \cdot 2 + d = \dfrac{4}{3} + 6 + 2c + d = 0$

- En $x = 2$ se anula la derivada: $f'(2) = 0$; $\quad \dfrac{2^2}{2} + 3 \cdot 2 + c = 2 + 6 + c = 0$, luego $c = -8$

Sustituimos en la anterior:
$\dfrac{4}{3} + 6 + 2(-8) + d = 0; \quad d = 10 - \dfrac{4}{3} = \dfrac{26}{3}$
Luego el polinomio es: $f(x) = \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{3x^2}{2} - 8x + \dfrac{26}{3}$

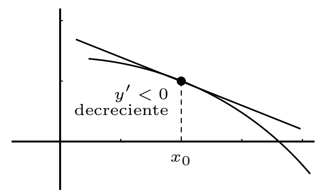
7.6. Representación gráfica de funciones

Crecimiento y decrecimiento Consideremos la función $y = f(x)$ en puntos suficientemente próximos a x_0.



Si $f'(x_0) > 0$ entonces la pendiente de la recta tangente es positiva luego f es CRECIENTE en x_0.

Si $f'(x_0) < 0$ entonces la pendiente de la recta tangente es negativa luego f es DECRECIENTE en x_0



El crecimiento de una función viene dado por el signo de la derivada

Ejemplos Estudiar el crecimiento y decrecimiento de las funciones

1. $y = 4x^3 - x^2$

   $y' = 12x^2 - 2x = 2x(6x - 1)$ que se anula para $x = 0, x = 1/6$, queremos saber cuando es positiva o negativa y', esos son los los valores que delimitan cambio de signo en la y';

   Probamos por ejemplo los valores de $x : -1, 0'1, 10$

x		0		$\frac{1}{6}$	
y'	$+$		$-$		$+$
y	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

2. $y = \dfrac{(x-3)^2}{1-x^2}$

   $$y' = \frac{2(x-3).(1-x^2) - (x-3)^2(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{-2x^3 + 6x^2 + 2x - 6 + 2x^3 - 12x^2 + 18x}{(1-x^2)^2} = \frac{-6x^2 + 20x - 6}{(1-x^2)^2}$$

   queremos saber cuando es positiva o negativa para ello hallamos los valores que delimitan cambio de signo en la y':

   Anulamos el numerador:

   $-6x^2 + 20x - 6 = 0$

   $6x^2 - 20x + 6 = 0 \quad x = \dfrac{20 \pm \sqrt{40 - 144}}{12} = \dfrac{20 \pm \sqrt{256}}{12} = \dfrac{20 \pm 16}{12} = \begin{cases} 3 \\ \frac{1}{3} \end{cases}$

   (el denominador por tener exponente par es siempre positivo)

x		$\frac{1}{3}$		3	
y'	$-$		$+$		$-$
y	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

Ejemplo a) Representar la función polinómica: $y = 12x - x^3$

Como es un polinomio basta con los puntos de corte y el crecimiento

1. Puntos de corte:

con $OY : x = 0$, resulta $y = 0$

con $OX : y = 0$, resulta $x = 0, x = \pm\sqrt{12} = 3'46$

2. Extremos y crecimiento: $y' = 12 - 3x^2$, se anula para $x = -2, x = 2$

x		-2		2	
y'	$-$		$+$		$-$
y	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

Sustituyendo en la función:
$f(-2) = -16$ "grande negativo", $f(2) = 16$ "grande positivo"

Como ejercicio dibujar la gráfica.

Ejemplo b) La función racional: $y = \dfrac{x+3}{x^2 - 3x + 2}$

Puntos de corte: con $OY : x = 0$, resulta $y = \dfrac{3}{2}$

con $OX : y = 0$, ha de ser cero el numerador: $x + 3 = 0$; resulta $x = -3$

Asíntotas:

verticales: Vemos donde se anula el denominador:

$x^2 - 3x + 2 = 0; \quad x = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$

horizontales $y = n$; $n = \lim\limits_{x\to\infty}(fx) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+3}{x^2 - 3x + 2} = 0$ asíntota $y = 0$

Extremos y crecimiento:

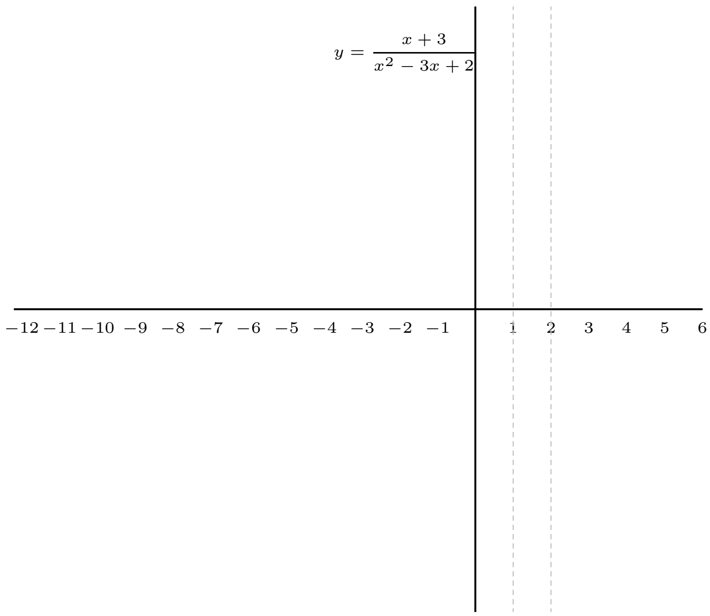
$y' = \dfrac{-x^2 - 6x + 11}{(x^2 - 3x + 2)^2}$

$f'(x) = 0$ para $-x^2 - 6x + 11 = 0$

$x^2 + 6x - 11 = 0 \quad x = \dfrac{-6 \pm \sqrt{36 + 44}}{2} = \dfrac{-6 \pm \sqrt{80}}{2} = \dfrac{-6 \pm 8'94}{2} = \begin{cases} 1'47 \\ -7'47 \end{cases}$

Probamos por ejemplo el valor de $x = 0$

x		$-7'47$		$1'47$	
y'	$-$		$+$		$-$
y	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$
		MIN		MAX	


$y = \dfrac{x+3}{x^2-3x+2}$
−12 −11 −10 −9 −8 −7 −6 −5 −4 −3 −2 −1 1 2 3 4 5 6

Problemas de derivadas

1. Aplicando la definición de derivada de una función en un punto, escribe la derivada de la función $y = x^2 + 3$ en $x = 7$

2. Aplicando la definición de derivada de una función en un punto, escribe la derivada de la función $y = \dfrac{5}{x}$ en $x = 3$

3. Aplicando la definición de derivada de una función en un punto, escribe la derivada de la función $y = 3x^2 + 7$ en $x = 10$

4. Aplicando la definición de derivada de una función en un punto, escribe la derivada de la función $y = \dfrac{2x+1}{x-3}$ en $x = 6$

5. Aplicando la definición de derivada de una función en un punto, escribe la derivada en x = 3 de la función $f(x) = 4x - x^2$. Hallar la recta tangente en x = 3. Representar gráficamente.

   Solución: $y = -2x + 9$

6. Aplicando la definición de derivada de una función en un punto, escribe la derivada en x = 3 de la función $f(x) = 5x^2 - x + 2$. Hallar la recta tangente en x = 3.

   Solución: $f'(3) = 29$; $y = 29x - 43$

7. Hallar la función derivada de la función del problema anterior aplicando la definición. Solución: $f'(x) = 10x - 1$

8. Aplicando la definición de derivada de una función en un punto, escribe la derivada de $f(x) = \frac{2}{x+1}$ en x = 1.

   En los siguientes el enunciado es çalcular la derivada":

9. $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$

10. $f(x) = \dfrac{3}{\sqrt{x}}$

11. $f(x) = (5x^2 + 6x)(4x^3 - 5)$

12. $f(x) = \dfrac{5}{x^2}$

    Solución: $f'(x) = \frac{10}{x^3}$

13. $f(x) = \dfrac{6}{x} - 7\sqrt{7} + x$

    Solución: $f'(x) = \frac{6}{x^2} + 1$

14. $f(x) = \dfrac{3x^2 + 6x - 1}{5}$

    Solución: $f'(x) = \frac{6x+6}{5}$

15. $f(x) = (5x^4 - 2)(x^2 - x)$

    Solución: $f'(x) = 30x^5 - 25x^4 - 4x + 2$

16. $f(x) = 3\sqrt{x}$

    Solución: $f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{x}}$

17. $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x}{2x + 5}$

    Solución: $f'(x) = \frac{4x^3+15x^2+10}{(2x+5)^2}$

18. $f(x) = 3'5 \cdot 10^x$

19. $f(x) = 2^x - 3^x$

20. $f(x) = \dfrac{3x^3 + 2x - 1}{3x^3 - x^2 + 5}$

    Solución:

    $f'(x) = \frac{(9x^2+2)(3x^3-x^2+5)-(3x^3+2x-1)(9x^2-2x)}{(3x^3-x^2+5)^2}$

21. $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x}{x - 4} - 2x$

    Solución: $f'(x) = \frac{(4x-3)(x-4)-(2x^2-3x)}{(x-4)^2} - 2$

22. $f(x) = 8\log_2 x$

23. $f(x) = x.\ln x$

    Solución: $f'(x) = \ln x + \frac{x}{x} = 1 + \ln x$

24. $f(x) = 3e^x \ln x$

    Solución: $f'(x) = 3e^x \ln x + \frac{3e^x}{x}$

25. $f(x) = xe^x$

    Solución: $f'(x) = e^x + x.e^x$

26. $f(x) = \frac{\ln x}{x+3}$

    Solución: $f'(x) = \frac{\frac{x+3}{x} - \ln x}{(x+3)^2}$

27. $y = \frac{3e^x+5}{3x-1}$

    Solución: $y' = \frac{(3e^x)(3x-1)-(3e^x+5),3}{(3x-1)^2}$

28. Hallar la derivada de $y = \dfrac{e^x}{3x^2}$ en $x = 2$

    Solución: $f'(2) = -\frac{e^2}{24}$

29. $f(x) = \dfrac{4x^2 - 5x}{x(x^2+1)}$

Solución: $f'(x) = \frac{(8x-5)(x^3+x)-(4x^2-5x)(3x^2+1)}{(x^3+x)^2}$

30. $y = e^{x^2-3}$

31. $y = \ln(x - x^2)$

32. $f(x) = \dfrac{2-x}{\sqrt{4-x^2}}$

33. La población de una cierta colonia de insectos crece de acuerdo con la fórmula $y = 1{,}000^t - 1{,}000(t+1)$ donde t es el tiempo en meses e y es el número de individuos de la población. Calcular la velocidad de crecimiento de la población a los doce meses.

Solución: $\approx 6'9{,}10^{36}$

34. Calcular la derivada de $y = \dfrac{5x-15}{3-x}$ simplificando el resultado al máximo. Interpretar el resultado.

Solución: 0, es constante

35. Hallar la ecuación de la tangente a la curva $y = \dfrac{2x^3+9}{4x+1}$ en el punto de abcisa 2.

Solución: $y - \frac{25}{9} = \frac{116}{81}(x-2)$

36. Hallar la recta tangente de una función en el punto que se indica:

a) $y = xe^{-x}$ en $x = 1$

b) $y = 2xe^{x^2}$ en $x = 2$

Solución: a) $y - e^{-1} = 0(x-1)$ b) $y - 4e^4 = 18e^4(x-2)$

37. Hallar la recta tangente de una función en el punto que se indica:

a) $y = e^x \ln x$ en $x = 2$

b) $y = 2e^{-x} + e^{-2x} + 2$ en $x = 1$

Solución: a) $y - 5'09 = 8'78(x-2)$ b) $y - (2e^{-1} + e^{-2} + 2) = (-2e^{-1} - 2e^{-2})(x-1)$

38. Hallar la recta tangente a: $y = x^2 - 3x$ en $x = 4$. Hacer representación gráfica.

Solución: $y - 4 = 5(x-4)$

39. De la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ se sabe que que su gráfica tiene un mínimo en $(2,3)$ y que corta al eje de ordenadas en $y = 7$, ¿Cuánto vale la función en $x = 5$?

Solución: $x^2 - 4x + 7, f(5) = 12$

40. El número de miembros de una peña deportiva fundada en 1993 es x años después de su fundación:

$$f(x) = -\frac{1}{3}(x^3 - 9x^2 + 24x - 48)$$

a) ¿En qué año tuvo el máximo número de miembros entre 1993 y 1998?

b) ¿Cuál es la tendencia actual en 1998, creciente o decreciente?

c) ¿Llegará a quedarse sin socios?

41. Halla una función polinómica de segundo grado sabiendo que el coeficiente principal es 1, pasa por el punto $P(1,0)$ y que la pendiente de la recta tangente en el punto de abcisa $x = 2$ es 7.

42. Halla el punto de la gráfica de la función $f(x) = 4x^2 - 3x + 5$ en el que la recta tangente es paralela a la bisectriz del segundo cuadrante.

Solución: $(1/4, 18/4)$

43. Encuentra una ecuación polinómica de segundo grado sabiendo que pasa por el punto $P(-1,6)$ y que tiene un mínimo en $Q(2,-3)$.

Solución: $f(x) = x^2 - 4x + 1$

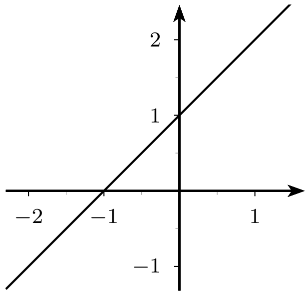
44. Sean las funciones $f(x) = 4x - x^2$ y $g(x) = x$.

a) Represéntalas gráficamente.

b) Encuentra un punto de la gráfica de la función f en el que la recta tangente sea paralela a la gráfica de la función g.

Solución: $x = 3/2$

45. La figura siguiente $y = x + 1$ es la derivada de una función f continua en R. Esboza una posible gráfica de función f.

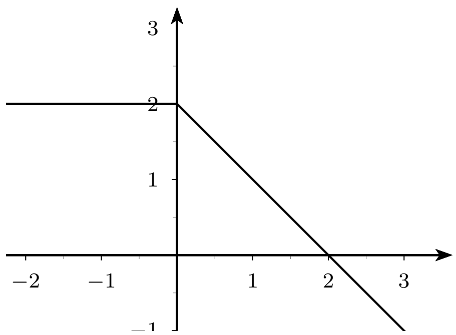


46. Calcula los valores de a, b y c sabiendo que la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ pasa por los puntos $(1, 0)$ y $(0, -2)$ y presenta un máximo relativo cuando $x = \frac{3}{2}$

    Solución: $f(x) = -x^2 + 3x - 2$

47. Sea la función $f(x) = x^2 - 6x + 5$. Calcula en qué punto de la gráfica la recta tangente tiene de pendiente 2.

48. La figura siguiente representa la gráfica de la derivada de una función f continua en R. Deduce a partir de ella su gráfica sabiendo que pasa por el punto $A(-2, 2)$.



49. Al vender un producto a un precio x entre 40 y 650 € , el beneficio es $y = -x^2 + 100x - 2100$ € . Obtén razonadamente el precio de x que hace máximo el valor de y.

50. Con un alambre de 4 metros se quiere construir borde de un rectángulo de área máxima. ¿Qué dimensiones hay que dar al rectángulo?

51. Descomponer el número 18 como suma de dos n meros positivos, de manera que el producto de uno de ellos por el cuadrado del otro sea máximo.

52. Halla el área del triángulo rectángulo de área máxima que tenga 10 m de hipotenusa.

    Solución: 25 m^2

53. Se desea comprar un terreno rectangular de 400 m^2 de superficie. ¿Cuáles serán las dimensiones más convenientes para que la construcción de la cerca resulte lo más económica posible?

54. De todos los pares x e y de números reales positivos cuya suma sea 30, determina el par (x, y) cuy producto $P = x \cdot y$ es máximo.

    Solución: $(15, 15)$

55. Obtén el área de un rectángulo inscrito en una circunferencia de radio 2 en función de la base x del rectángulo. Representa la función área obtenida deduce de su derivada dónde es creciente o decreciente, así como cuál es el rectángulo de área máxima inscrito en dicha circunferencia.

56. Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento así como los posibles extremos relativos de las funciones siguientes. Esboza también una gráfica de dichas funciones.

    a) $f(x) = 3x^3 + 2x$
    b) $f(x) = 3x - x^3$
    c) $f(x) = 2x - x^2$
    d) $f(x) = x^4 - 2x^2$
    e) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$
    f) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 9}$

57. Halla a, b y c sabiendo que la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ pasa por (-1, 0) y tiene un máximo en (0, 4).

    Solución: $-3x^2 + 4$

58. Una población de 100 millones de bacterias está siendo tratada para su eliminación y se sabe que la población p en millones en el instante t (en días) es $p(t) = 100 - t^2$.

    a) Halla su tasa de variación entre los días t = 1 y t= 2.
    b) ¿Cuál es la velocidad de decrecimiento de la población en t = 3?

59. Se ha trazado la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^3$ y se sabe que su pendiente es 3 y que pasa por el punto $(0, -2)$. Halla el punto de tangencia.

60. Encuentra las funciones polinómicas

61. $f(x) = ax^3+bx^2+cx+d$ cuya segunda derivada sea $x-1$. ¿Cuál o cuáles de ellas tienen un mínimo relativo en el punto $(4, -\frac{1}{3})$?

    Solución: $\frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} - 4x + 13$

62. Supongamos que el rendimiento r de un alumno en un examen de una hora viene dado por $r = 300t(1-t)$, donde $O \leq t \leq 1$ es el tiempo en horas. Se pide:

    a) ¿En qué momentos aumenta o disminuye el rendimiento?

    b) ¿En qué momentos el rendimiento es nulo?

    c) ¿Cuándo se obtiene el mayor rendimiento y cuál es?

    Solución: $1/2, 0 - 1, 75$

63. Un trabajador experimentado de una fábrica de juguetes puede montar un máximo de 100 juguetes diariamente. Si un trabajador sin experiencia ocupa su lugar, se estima que el número de juguetes que diariamente puede producir al cabo de x días es $P(x) = 100(1 - e^{-kx})$, siendo k una constante que depende de cada individuo.

    a) Obtén el valor de la constante k para un trabajador novato que es capaz de montar 50 juguetes con sólo un día de entrenamiento.

    b) ¿Cuántos juguetes montará el cuarto día de entrenamiento?

    c) Obtén el valor de la derivada de $P(x)$ en $x = 1$ y en $x = 2$. Comenta los valores obtenidos en la relación a la velocidad de aprendizaje de este trabajador sin experiencia.

64. Sea la función $f(x) = \dfrac{16}{x^2(x-4)}$

    a) Determina su dominio de existencia y sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

    b) Calcula sus asíntotas y extremos.

    c) Representa gráficamente la función.

65. Sea la función $f(x) = \dfrac{x^2}{(x-1)^2}$

    a) Determina su dominio de existencia y sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

    b) Calcula sus asíntotas y extremos.

    c) Representa gráficamente la función.

66. Calcula la derivada de $y = \dfrac{1}{x}$ y justifica si esa función es creciente o decreciente en el intervalo $[1, 7]$.

67. Se define la función $f(x) = x - \dfrac{k}{x}$. Se pide:

    a) Determinar k para que dicha función tenga un máximo para $x = -1$.

    b) Dibuja la gráfica de la función f para el valor de k hallado en el apartado anterior.

8. PROBABILIDAD

8.1. Introducción

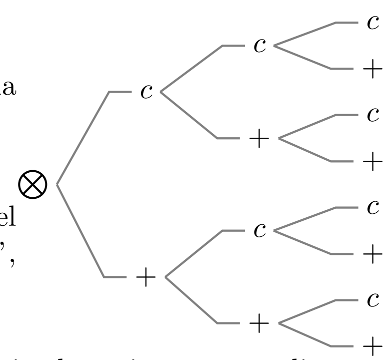
Fenómeno aleatorio es aquel en el cual es imposible predecir el resultado en cada realización u observación; ej: lanzar una moneda, extraer una carta de una baraja, número de nacimientos de una ciudad en un mes, etc.

Cálculo de probabilidades es el modelo teórico de las regularidades que se observan en los resultados de los fenómenos aleatorios cuando crece el número de pruebas.

8.2. Sucesos

El conjunto de todos los resultados asociados a un experimento aleatorio se llama **espacio muestral** y se suele representar por E

Ejemplo Escribir el espacio muestral del lanzamiento de una moneda tres veces a) por extensión, b) mediante diagrama en árbol.
a) $E = \{ccc, cc+, c+c, +cc, c++, +c+, ++c, +++\}$



Suceso es todo subconjunto del espacio muestral. Por ejemplo, en el experimento lanzar un dado $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, son sucesos "salir par", "salir menos de 3".

Se dice que un suceso se ha verificado cuando al realizar la experiencia aleatoria correspondiente, el resultado es uno de los elementos de ese suceso. Si al tirar el dado sale un 6 se han verificado, entre otros, los sucesos $\{6\}, \{salir\ par\}, \{5, 6\}, E$.

Los sucesos formados por un solo elemento se llaman **sucesos elementales**, por ejemplo $\{6\}$.
El espacio muestral se llama también **suceso seguro**, el suceso $\emptyset$ se llama suceso imposible.

Hemos considerado los sucesos como conjuntos, por tanto hablaremos de:
inclusión $\subset$: $A \subset B$ (se lee A contenido en B), si todos los elementos de A están en B
unión $\cup$: $A \cup B$ se forma juntando los elementos de A y de B
intersección $\cap$: $A \cap B$ está formado por los elementos comunes a los dos
complementario $\bar{A}$: los elementos restantes que no están en A.

Existen también denominaciones propias del lenguaje de sucesos:
$A \subset B$ es $A \Longrightarrow B$ (se lee A implica B), la verificación del suceso A implica la del suceso B; ej $A =$ salir múltiplo de 3, $B =$ salir más de 2.
$A \cup B$ se verifica el suceso A **o** el suceso B, se verifica **al menos** uno de los dos
$A \cap B$ se verifica el suceso A **y** el suceso B
El complementario $\bar{A}$ del suceso A se llama suceso **contrario**.
Dos sucesos disjuntos, sin ningún elemento común: $A \cap B = \emptyset$ se llaman **incompatibles**.

Ejercicio En el lanzamiento de un dado ver como se relacionan los sucesos:

- A= "salir más de dos"

- B= "salir múltiplo de tres"
- C= "salir número primo"
- D="salir múltiplo de cuatro"

8.3. Frecuencia de un suceso

Prueba es cada realización de un experimento aleatorio. Sea un experimento aleatorio del que se han realizado N pruebas. Si el suceso A aparece n veces se dice que en la referida muestra de N pruebas la **frecuencia relativa** del suceso A es $fr(A) = \frac{n}{N}$.

Ejercicio En el lanzamiento de un dado veinte veces se obtiene el siguiente resultado:

1,3,1,4,6,5,3,4,2,3,5,1,4,3,2,1,3,2,4,6

Considerando los sucesos:

- A= "salir más de dos"
- B= "salir múltiplo de tres"
- C= "salir número primo"
- D="salir múltiplo de cuatro"

Hallar:

- $fr(C) =$
- $fr(D) =$
- $fr(C \cup D) =$
- $fr(C \cap D) =$

Observamos que: (podemos pensar en el lanzamiento 20 veces de un dado: A =salir par)
1) La frecuencia relativa de un suceso está comprendida entre 0 y 1.
2) La frecuencia relativa del suceso seguro es 1.
3) La frecuencia relativa de la unión de dos sucesos incompatibles es la suma de las respectivas frecuencias: si$A \cap B = \emptyset, \quad fr(A \cup B) = fr(A) + fr(B)$

Por otro lado si por ejemplo se lanza una moneda 50 veces y salen 28 caras, no tiene por qué ocurrir que al repetir las 50 tiradas vuelvan a salir 28 caras, o sea, las frecuencias relativas suelen variar en cada serie de pruebas.

No obstante al aumentar el número de pruebas se tiene el siguiente resultado práctico llamado **ley del azar**: las frecuencias relativas de los sucesos tienden a estabilizarse alrededor de ciertos números, a estos números se les suele llamar probabilidad de los respectivos sucesos.

8.4. Probabilidad

Es el modelo teórico de las frecuencias relativas. Por tanto la probabilidad de un suceso es un número entre 0 y 1 y cumple las condiciones:

1) $p(E) = 1$, la probabilidad del suceso seguro es 1.

2) dados A, B sucesos incompatibles : $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$, es decir la probabilidad de la unión de sucesos incompatibles es la suma de las probabilidades.

Probabilidad de **Laplace** es la que asigna a cada suceso elemental la misma probabilidad, por tanto la probabilidad de un suceso elemental es $\frac{1}{N}$ siendo N el número de sucesos elementales.

Entonces si el suceso A es la unión de n sucesos elementales tendremos:

$p(A) = \frac{n}{N}$ o en otras palabras $p(A) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}}$

Por ejemplo en la extracción de una carta de una baraja española, la probabilidad de que salga un basto es $p(B) = \frac{10}{40}$

Probabilidad **estimada**, empírica o a posteriori de un suceso es la frecuencia relativa de la aparición del suceso cuando el número de observaciones es muy grande.

Por ejemplo a la vista de la producción de un gran número de piezas, una fábrica encuentra que el 20 % de los cerrojos producidos por una determinada máquina son defectuosos para unos ciertos requerimientos. Parece lógico asignar una probabilidad 0'2 de obtener un cerrojo defectuoso.

Ejercicio Se hacen 20 extracciones con devolución de una baraja española, con el resultado (para bastos, copas, oros, espadas; usamos las abreviaturas: ba, co, or, es; para caballo cab, para sota sot)

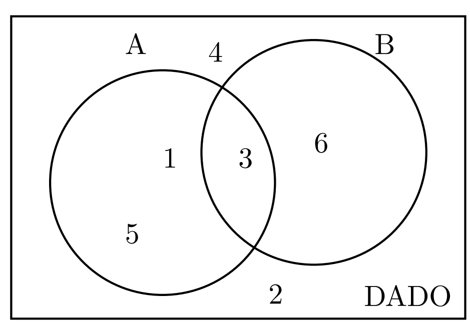
7 co, rey co, sot es, 4 ba, rey or, cab co, sot es, 5 es, cab or, sot es, as es, rey or, 2 or, 6 ba, as es, sot ba, sot or, 6 ba, 2 co, sot co

Hallar las frecuencias relativas de los sucesos:

- O= "salir oros"
- A= "salir más de 3"
- "salir basto o figura"
- "salir basto y figura"= "salir figura de bastos"

Propiedades de una probabilidad:

Se deducen de las condiciones de la definición de probabilidad. Al lanzar un dado podemos pensar en A = "salir impar", B = "salir múltiplo de 3"



1. La probabilidad del suceso imposible es 0: $p(\emptyset) = 0$,
2. Para el suceso complementario se cumple:
$$p(\bar{A}) = 1 - p(A)$$
3. Para la unión de dos sucesos cualesquiera se tiene: $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

Ejemplos

1. Hallar la probabilidad de que salga bastos o figura al sacar una carta de una baraja española (40 cartas).

   $A =$ salir bastos, $p(A) = \dfrac{10}{40}$

   $B =$ salir figura (sota, caballo, rey), $p(B) = \dfrac{12}{40}$

   $A \cap B$ salir bastos y figura, o sea figura de bastos, $p(A \cap B) = \frac{3}{40}$

   $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \dfrac{10}{40} + \dfrac{12}{40} - \dfrac{3}{40} = \dfrac{19}{40}$

2. En una ciudad el 60 % de personas llevan gafas, el 30 % fuman y el 10 % fuman y llevan gafas. Se elige una persona al azar. Hallar la probabilidad de que ni fume ni lleve gafas.

   En problemas de este tipo se entiende que el último es la intersección, por tanto que el 10 % está incluido en los anteriores.

   $G =$ llevar gafas, $p(G) = 0'6$

   $F =$ fumar, $p(F) = 0'3$

   $G \cap F$ llevar gafas y fumar, $p(G \cap F) = 0'1$

   Nos piden la probabilidad de que ni fume ni lleve gafas, eso es lo contrario de la unión:

   $p(G \cup F) = p(G) + p(F) - p(G \cap F) = 0'6 + 0'3 - 0'1 = 0'8$

   $p($ ni fume ni lleve gafas $) = 1 - 0'8 = 02$

3. Una urna contiene 25 bolas blancas de madera, 36 blancas de cristal, 39 bolas rojas en total, y 32 de madera en total.

   a) Hallar el número total de bolas.

   Si se elige al azar una bola:

   b) ¿Cuál es la probabilidad de que sea blanca?.

   c) ¿Cuál es la probabilidad de que sea roja y de madera?.

   d) ¿Cuál es la probabilidad de que sea blanca o de cristal?.

   a) Completamos el cuadro:

	rojas	blancas	
madera	7	25	32
cristal	32	36	68
	39	61	100

   Consideremos los sucesos $B =$ extraer bola blanca, $M =$ extraer bola de madera, $R =$ extraer bola roja. Entonces:

   b) $p(B) = 61/100 = 0'61$

   c) $p(R \cap M) = 7/100 = 0'07$

   d) $p(B \cup C) = p(B) + p(C) - p(B \cap C) = 0'93$

4. Una caja contiene 10 piezas, de las cuales 4 son defectuosas.

   I) Hallar la probabilidad de extraer dos defectuosas consecutivas

   a) sin devolver la primera.

b) devolviendo la primera.

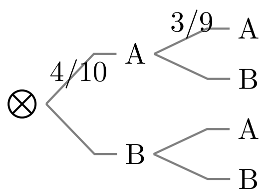
II) Sin devolver la primera, hallar la probabilidad de obtener una de cada tipo.

A = extraer pieza defectuosa ; B = extraer pieza no defectuosa

I) Para hallar la probabilidad de una rama se multiplican las probabilidades de la rama:

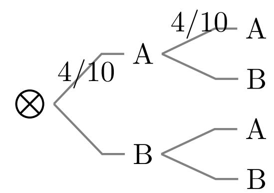
a) Sin devolución, sucesos dependientes va cambiando la probabilidad:

$$p(A_1A_2) = \frac{4}{10}.\frac{3}{9} = \frac{2}{15}$$

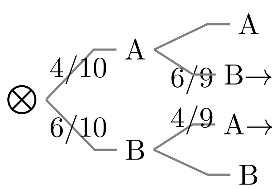


b) Con devolución, sucesos independientes:

$$p(A_1A_2) = \frac{4}{10}.\frac{4}{10} = \frac{4}{25}$$



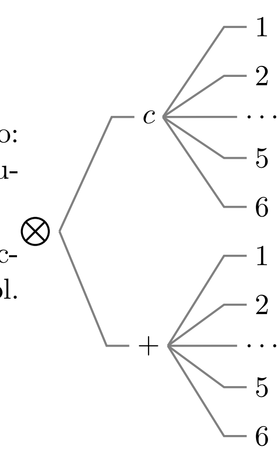
II) Como es la unión de varias ramas, se suman las probabilidades de las ramas favorables:



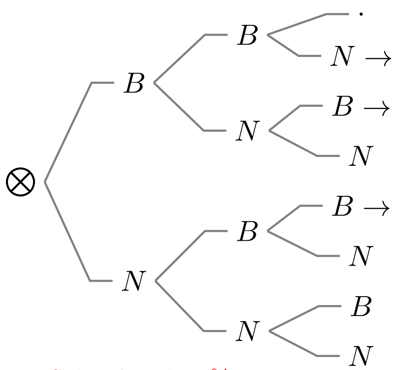
$$p(\text{una de cada tipo}) = \frac{4}{10}.\frac{6}{9} + \frac{6}{10}.\frac{4}{9} = \frac{24}{45}$$

Observaciones:

1. En la extracción de, por ejemplo, dos bolas de una urna es lo mismo: extracción simultánea de las dos, que extracciones sucesivas sin devolución.
2. Experimentos independientes simultáneos es situación análoga a extracción sucesiva con devolución, esto permite utilizar diagrama en árbol. Por ejemplo se lanza un dado y una moneda.



Ejemplo En una bolsa hay 2 bolas blancas y 3 negras. Hacemos una extracción de tres bolas. Hallar la probabilidad de que dos de ellas sean blancas.



$$p(\text{dos blancas}) = \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot 1 + \frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3} + \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3} = \frac{3}{10}$$

Solución: el 20 %

Problemas de probabilidad

1. Escribir el espacio muestral correspondiente al lanzamiento de un dado dos veces. a) Mediante diagrama en árbol. b) Por extensión.

2. Escribir el espacio muestral correspondiente a la suma de puntos en el lanzamiento de un dado dos veces. ¿Tiene la misma probabilidad el 8 que el 3?.

3. Sea han hecho 50 lanzamientos de un dado con los siguientes resultados:

1	5	6	6	3
2	2	5	6	4
1	2	3	4	2
3	6	5	6	5
5	3	5	6	3
2	1	6	1	2
5	6	2	5	4
4	3	4	5	4
1	6	4	3	4
4	6	3	5	1

   Hallar las frecuencias de los siguientes sucesos:

   a) Salir 4.

   b) Salir par.

   c) Salir número primo.

   Solución:

1	6
2	7
3	8
4	9
5	10
6	10

4. En una ciudad el 30 % de personas llevan gafas y el 70 % fuman. Se elige una persona al azar. Hallar: a) Probabilidad de que fume. b) Probabilidad de que lleve gafas.

   Solución: a) 0'7 b) 0'3

5. Se tiran un dado y una moneda. Hallar la probabilidad de obtener a) cruz y número primo, b) cruz o número primo.

   Solución: a) 1/3, b) 5/6

6. Dada la frase: .Algunos de los que no estudian, también aprueban", elegimos al azar una palabra de ella, hallar la probabilidad de que tenga tres letras.

   Solución: 1/4

7. Un ladrón tiene 7 llaves maestras y quiere abrir una puerta que sólo la abren dos de ellas; como tiene prisa, elige al azar una de las llaves. Hallar la probabilidad de que no abra la puerta.

   Solución: 5/7

8. Una urna contiene 4 bolas blancas numeradas del 1 al 4, 6 negras numeradas del 5 al 10 y 10 rojas numeradas del 11 al 20. Se extrae una al azar. Hallar: a) Probabilidad de que sea roja o blanca. b) Probabilidad de que sea negra y número par. c) Probabilidad de que sea roja y múltiplo de 3. d) Probabilidad de que sea negra o número par.

   Solución: a) 0'7 b) 3/20 c) 0'15 d) d) 13/20

9. Si dos sucesos ligados a una experiencia aleatoria tienen la misma probabilidad y los sucesos elementales son equiprobables, ¿puede deducirse que ambos sucesos son iguales? Razona la respuesta.

10. Se juega a una ruleta numerada de 1 al 100 hallar: a) Probabilidad de que el número que salga sea múltiplo de 10. b) Probabilidad de que el número que salga sea múltiplo de 2 y de 11. c) Probabilidad de que el número que salga sea divisor de 99.

    Solución: a) 0'1 b) 0'04 c) 0'06

11. En una urna hay 3 bolas blancas, 4 negras, 5 rojas y 6 azules. Hallar: a) Probabilidad de que al sacar una bola sea azul. b) Probabilidad de que al sacar dos bolas sean blancas. c) Probabilidad de que al sacar dos bolas sean, la primera negra y la segunda roja.

    Solución: a) 0'3333 b) 0'0196 c) 0'0653

12. Hallar la probabilidad de que al sacar dos cartas de una baraja española: a) sean 2 oros, sin devolver la primera carta. b) sean 2 figuras, devolviendo la primera carta.

Solución: a) 0'057 b) 0'09

13. En una clase mixta hay 30 alumnas; 15 estudiantes repiten curso de los que 10 son alumnos y hay 15 alumnos que no repiten curso. a) Justificar que el número de estudiantes de esa clase es 55. b) Si se elige al azar un estudiante de esa clase: b_1) ¿Cuál es la probabilidad de sea alumno?. b_2) ¿Cuál es la probabilidad de que repita curso y sea alumna?. c) Si se eligen dos estudiantes al azar ¿cuál es la probabilidad de que ninguno repita curso?.

    Solución: b_1 0'45, b_2 0'09, c) 0'52

14. La caja C_1 contiene 5 fichas azules y 3 rojas, la caja C_2 contiene 4 fichas azules y 6 rojas. Se traslada una ficha de la caja C_1 a la caja C_2; a continuación se extrae una ficha de C_2. ¿Cuál es la probabilidad de que la ficha extraída sea roja?.

    Solución: p(roja extracción 2^a caja) = 51/88

15. Se lanzan simultáneamente tres monedas al aire. ¿Cuál es la probabilidad de que todas queden en el suelo del mismo modo?.

    Solución: $p(c) + p(+) = 1/4$

16. Se extraen 3 cartas de una baraja española (40 cartas). Hallar la probabilidad de que sean 3 bastos; a) sin reemplazamiento; b) con reemplazamiento.

    Solución: a) $P[(1B) \cap (2B) \cap (3B)] = 10/40{,}9/39{,}8/38 = 0'012$, b) $P[(1B) \cap (2B) \cap (3B)] = 10/40{,}10/40{,}10/40 = 0'015$

17. De una baraja de 40 cartas se toman dos. Hallar la probabilidad: a) De que las dos sean oros. b) De que las dos sean espadas o figuras. c) Al menos una sea sea bastos.

    Solución: a) $p(OO) = 10/40{,}9/39 = 0'0576$, b) X salir espadas o figura $p(XX) = 19/40{,}18/39 = 0'21$, c) árbol $p(almenosunbasto) = 0'442$

18. Se lanzan 6 monedas simultáneamente. Calcular la probabilidad de que al menos salga una cara.

    Solución: 0'984

19. Consideremos la baraja española (40 cartas). Extraemos una carta al azar, miramos de que palo es y la devolvemos a la baraja. Repetimos la misma operación cuatro veces seguidas. Se pide: a) Probabilidad de haber sacado dos veces solamente una carta de oros. b) Probabilidad de haber sacado más de dos cartas de bastos. c) Hallar las probabilidades en los dos casos anteriores en el supuesto de que no devolvemos las cartas en cada extracción.

    Solución: a) $6(10/40)^2(30/40)^2$, b) $(10/40)^4 + 4(10/40)^3(30/40)$, c) $c_a = p(2oros) = 6\frac{10}{40}\frac{9}{39}\frac{30}{38}\frac{29}{37}$, $c_b = p(3o4bastos) = \frac{10}{40}\frac{9}{39}\frac{8}{38}\frac{7}{37} + 4\frac{10}{40}\frac{9}{39}\frac{8}{38}\frac{30}{37}$

20. Tres cajas tienen las siguientes composiciones: A = 5 bolas blancas y 2 negras, B = 7 bolas blancas y 1 negra y C = 2 bolas blancas y 8 negras. Se escoge al azar una caja y se extraen dos bolas sin reemplazamiento. Calcula la probabilidad de que las bolas sean del mismo color.

    Solución: $1/3(11/21 + 3/4 + 29/45) = 0'6394$

21. Dos niños escriben en un papel una vocal. ¿Cual es la probabilidad de que escriban la misma vocal?

    Solución: $5\frac{1}{25} = 0'2$

22. En una asignatura se ha decidido aprobar a aquellos que superen uno de los dos parciales. Con este criterio aprobó el 80 %, sabiendo que el primer parcial lo superó el 60 % y el segundo el 50 % ¿Cuál hubiese sido el porcentaje de aprobados, si se hubiese exigido superar ambos parciales?

    Solución 30 %

23. Según un cierto estudio, el 40 % de los hogares europeos tienen contratado el acceso a internet, el 33 % tiene contratada la televisión por cable, y el 20 % disponen de ambos servicios. Se selecciona un hogar europeo al azar.

    a) ¿Cuál es la probabilidad de que sólo tenga contratada la televisión por cable?

    b) ¿Cuál es la probabilidad de que no tenga contratado ninguno de los dos servicios?

    Solución a) 0'13, b) 0'47

24. De una baraja española (40 cartas) se sacan dos cartas. Encontrar la probabilidad de obtener:

    a) Dos cartas de bastos

    b) Dos cartas del mismo número.

    Responder a las mismas preguntas si la carta primeramente extraída se devuelve antes de la segunda extracción.

    Solución: a) 0'0576, b) 0'076, a') 0'0625, b') 0'1

25. Una moneda está trucada de forma que la probabilidad de que salga cara es 0'4. Si se lanza 3 veces la moneda encontrar la probabilidad de que salgan dos caras.

9. ESTADISTICA

9.1. Introducción

Fenómeno aleatorio es aquel en el cual es imposible predecir el resultado en cada realización u observación; ej: lanzar una moneda, extraer una carta de una baraja, número de nacimientos de una ciudad en un mes, etc.

Estadística Descriptiva es la parte de las Matemáticas que se ocupa de proporcionar métodos para recoger, organizar, analizar y resumir listas de datos numéricos de fenómenos aleatorios.

Colectivo o población es el conjunto de elementos con caracteres comunes.

Muestra es un subconjunto o parte representativa de un colectivo.

9.2. Variable estadística

Variable estadística es el carácter común que se considera en los elementos del colectivo. Hay dos tipos cuantitativa y cualitativa, según que el carácter sea numérico o no; ej: colectivo: alumnos de un instituto, variable cualitativa color del pelo, variable cuantitativa estatura.

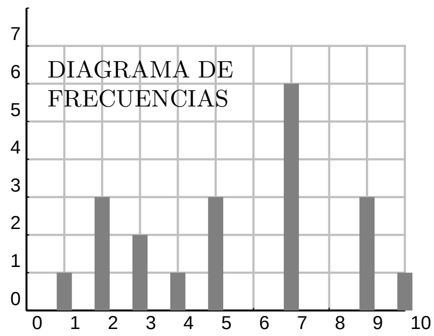
Frecuencia de un dato es el número de veces que se presenta.

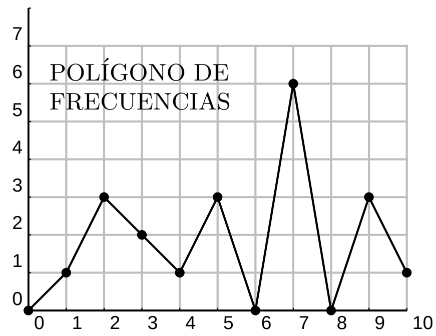
Frecuencia relativa de un dato es la frecuencia dividida por el número de datos.

Frecuencia acumulada hasta un dato es la suma de las frecuencias de ese dato y de los anteriores.

Ejemplo * Supongamos que las calificaciones de 20 alumnos vienen dadas por la serie estadística:
2,4,5,9,9,10,7,3,2,5,7,3,7,7,5,1,2,7,7,9

var.est	frecuencias	frec. rel	frec. acum.	frec .rel. acum.
x_i	n_i	f_i	N_i	F_i
0	0	0	0	0
1	1	0'05	1	0'05
2	3	0'15	4	0'20
3	2	0'10	6	0'30
4	1	0'05	7	0'35
5	3	0'15	10	0'50
6	0	0	10	0'50
7	6	0'30	16	0'80
8	0	0	16	0'80
9	3	0'15	19	0'95
10	1	0'05	20	1
	$\Sigma n_i = 20$			





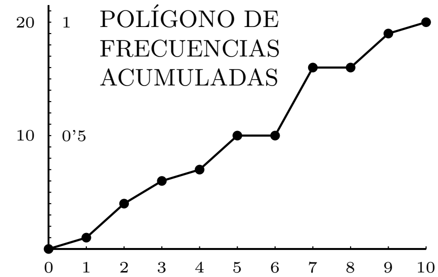


Diagrama de sectores Sea trata de repartir un círculo en sectores proporcionales a las frecuencias:

Por ejemplo para mostrar la proporción de suspensos y aprobados:

Para hacer el diagrama de sectores se plantea la regla de tres: si todo el círculo 360^0 corresponde con 20 notas, a los 7 suspensos le corresponde x, $x = 126^0$

Normalmente interesa dar un resumen numérico de los datos de un fenómeno aleatorio. Para ello se requieren dos números: uno que dé un valor medio representativo y otro que indique lo alejados que están los datos entre sí.

Tenemos entonces las medidas de **centralización** que indican valores medios representativos y las de **dispersión** que indican lo separados que están los datos.

9.3. Medidas de centralización

Moda es el valor de la variable estadística que tiene mayor frecuencia. En el ejemplo* de las notas de clase: 7.

Mediana es el valor central del conjunto ordenado de datos x_i, el que deja a la izquierda la mitad de los datos. En el ejemplo* de las notas de clase: 1 2 2 2 3 3 4 5 5 5*7 7 7 7 7 7 9 9 9 10 la mitad está entre $N_i = 10$ y 11, o sea entre 5 y 7, (pasa cuando es par el número de datos) y se toma la semisuma: mediana $= \dfrac{5+7}{2} = 6$.

Media es la media aritmética: se suman todos los datos y se divide por el número de datos.

$$\boxed{\text{media sin frecuencias: } \bar{x} = \frac{\Sigma x_i}{N}}$$

Si conviene considerar las frecuencias, como cada dato se sumaría un número de veces igual a su frecuencia resulta:

$$\boxed{\text{media con frecuencias: } \bar{x} = \frac{\Sigma x_i n_i}{\Sigma n_i}}$$

En el ejemplo* de las notas de clase: $\bar{x} = \dfrac{111}{20} = 5'55$

9.4. Medidas de dispersión

Rango o recorrido es la diferencia entre los valores más grande y más pequeño, en el ejemplo: $10 - 1 = 9$.

Desviación media Desviación de un valor respecto de la media es $x_i - \bar{x}$.

Se llama desviación media a la media de los valores absolutos de las desviaciones. Como los valores absolutos se trabajan mal con calculadora en la práctica se usa:

Desviación típica es la raíz cuadrada de la media aritmética de los cuadrados de las desviaciones, se representa por σ:

$$\boxed{\text{Desviación típica sin frecuencias: } \sigma = \sqrt{\frac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}{N}}}$$

$$\boxed{\text{Desviación típica con frecuencias: } \sigma = \sqrt{\frac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2 n_i}{\Sigma n_i}}}$$

Varianza es el cuadrado de la desviación típica, se representa por σ^2

Ejemplos: (sin calculadora estadística)

1. (Datos sin frecuencias) Dados los números: 3 6 12
   a) Hallar la media. b) Hallar la desviación típica.

   $\boxed{\text{Media: } \bar{x} = \dfrac{3+6+12}{3} = 7}$

   Cálculo de la desviación típica:

   Desviaciones $3 - 7 = -4, \quad 6 - 7 = -1, \quad 12 - 7 = 5.$

   Cuadrado de las desviaciones: 16, 1, 25

   Varianza: media de los cuadrados de las desviaciones: Varianza: $\sigma^2 = \dfrac{16+1+5}{3} = 14$

   Desviación típica: Raíz cuadrada de la varianza: $\boxed{\text{Desviación típica: } \sigma = \sqrt{14} = 3'74}$

2. (Datos con frecuencias) Dados los datos y sus frecuencias. a) Hallar la media. b) Hallar la desviación típica.

x_i	n_i	$x_i \cdot n_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2 \cdot n_i$
6	8	48	-4	16	128
8	20	160	-2	4	80
16	12	192	6	36	432
	$\Sigma n_i = 40$	$\Sigma x_i n_i = 400$			$\Sigma(x_i - \bar{x})^2 \cdot n_i = 640$

Media: $\bar{x} = \dfrac{\Sigma x_i n_i}{\Sigma n_i} = \dfrac{400}{40} = 10$

Varianza: $\sigma^2 = \dfrac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2 n_i}{\Sigma n_i} = \dfrac{640}{40} = 4$

Desviación típica: $\sigma = \sqrt{4} = 2$

Ejercicios: (sin calculadora estadística)

1. (Datos sin frecuencias) Dados los números: 6 8 6 9 6
   a) Hallar la media. b) Hallar la desviación típica. c) Hallar la mediana. d) Hallar la moda.

2. (Datos con frecuencias) Dados los datos y sus frecuencias. a) Hallar la media. b) Hallar la desviación típica.

x_i	n_i
5	4
9	10
25	2

Funciones estadísticas de la calculadora Casio fx-82ES

ACCIÓN	TECLAS	PANTALLA
modo estadístico	MODE 2 1	STAT
frecuencias (si/no)	SHIFT MODE ↓ 3	
entrar datos	SHIFT 1 DATA x_i =	
tabla vista eliminar todos los datos	SHIFT 1 3 2	
borrar dato	DEL	
salir editor	AC	
resultados	SHIFT 1 5	media, etc

Ejercicios: (con calculadora estadística)

1. Dados los números: 9 3 8 10 1 9 5 6 8 2 3 10 10 1 10 2 9 5
   a) Hallar la media. b) Hallar la desviación típica. c) Hallar la mediana. d) Hallar la moda.

2. Dados los datos y sus frecuencias:

x_i	2	3	5	7	9	12
n_i	13	12	18	16	14	13

   a) Hallar la media. b) Hallar la desviación típica.

3. Dados los números: 2 2 6 6 8 5 6 4 10 3 10 1 8 5 5 6 6 1 6 9 10 4 4 3 6 2 1 3 8 10 9 6 3 3 5 5 3 7 6 9 2 6 8 6 3 3 5 8 8 8
   a) Hallar la media. b) Hallar la desviación típica. c) Hallar la mediana. d) Hallar la moda.
   media = 5,46 des. Tip. = 2,59 num. Dat= 50 mediana= 5,5 moda= 6

4. Dados los datos y sus frecuencias:

x_i	1	2	4	5	8	9	11	12	14	15	18	19	21
n_i	19	13	12	12	11	11	14	19	18	14	16	18	13

   a) Hallar la media. b) Hallar la desviación típica. media = 10,98 des. Tip. = 6,39 num. Dat= 190

Media y desviación típica Son las dos medidas más importantes

En el ejemplo de las veinte notas se obtiene: $\sigma = 2'67$. Recordemos que la media era 5'55. Nos dicen que si tomamos un alumno al azar lo más probable es que haya obtenido una nota próxima a 5'55 con una diferencia de $\pm 2'67$.

Pero sobre todo sirve para comparar dos variables; si otro curso tiene como media 6'5 y desviación típica 1'2, podríamos afirmar con total seguridad que estos últimos alumnos han sacado mejores notas y que éstas son más uniformes.

9.5. Observaciones:

1. **Agrupamiento en clases:**

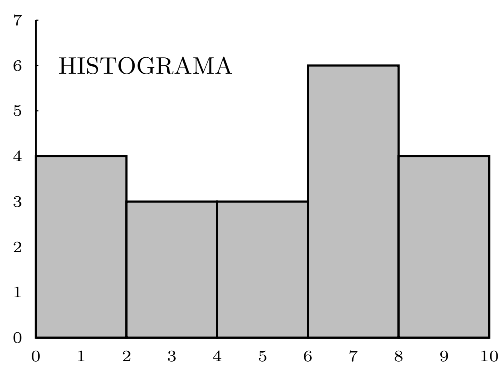
   Si interesa porque hay muchos valores distintos, se suelen agrupar los valores en **intervalos de clase** por ej. las tallas de 5 cm en 5 cm, el centro de cada intervalo se llama **marca de clase** y se considera éste como el valor de la variable estadística.

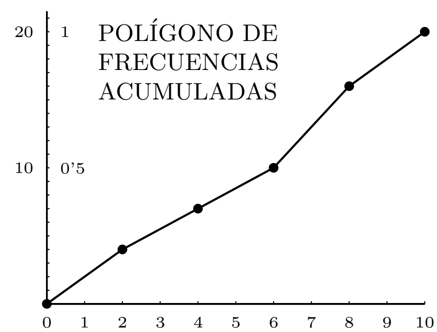
   Un criterio para decidir el número de intervalos de clase puede ser el de Norcliffe:

   $$\text{n}^0 \text{ de clases} \approx \sqrt{\text{n}^0 \text{ de datos}}$$

   En el ejemplo * n^0 clases $\approx \sqrt{20} \approx 5$ intervalos iguales, el intervalo total es 10, la longitud de cada intervalo de clase es $10/5 = 2$

int.clase	marca clase				
	x_i	n_i	f_i	N_i	F_i
[0,2]	1	4	0'20	4	0'20
(2,4]	3	3	0'15	7	0'35
(4,6]	5	3	0'15	10	0'50
(6,8]	7	6	0'30	16	0'80
(8,10]	9	4	0'20	20	1
	$\Sigma n_i = 20$				





2. **Cuantiles:**

   Análogamente a como la mediana ocupa el lugar medio de la serie estadística, el 1^{er} cuartil Q_1 deja a la izquierda $\frac{1}{4}$ del total de la serie de datos ordenada, o sea de 100 deja 25, el 3^{er} decil D_3 el 30 %, el percentil 99 P_{99} el 99 %, etc.

   También se considera: rango intercuartílico $Q_3 - Q_1$, rango interdecílico $D_9 - D_1$, rango intercentílico $P_{99} - P_1$.

   Cuando hay que hallar varios compensa hacer la columna de frecuencias absolutas acumuladas e incluso las de los % acumulados.

Ejemplo: Hallar Q_1, Q_3, P_{30}, P_{77}

x_i	n_i	N_i
1	2	2
2	2	4
3	4	8
4	5	13
5	8	21
6	9	30
7	3	33
8	4	37
9	3	40
	40	

Q_1 : $\dfrac{N}{4} = \dfrac{40}{4} = 10$; deja a la izda 10; $Q_1 = 4$

Q_3 : $\dfrac{3N}{4} = \dfrac{120}{4} = 30$; deja a la izda 30; $Q_3 = \dfrac{6+7}{2} = 6'5$

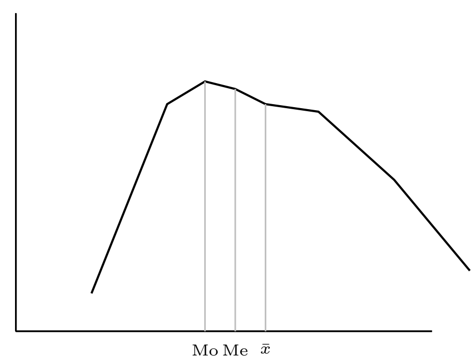
P_{30} : por regla de tres $\begin{matrix} 100 & - & 30 \\ 40 & - & y \end{matrix}$ $y = 12$; deja a la izquierda 12; $P_{30} = 4$

P_{77} : $\begin{matrix} 100 & - & 77 \\ 40 & - & y \end{matrix}$ $y = 30'8$; deja a la izquierda 30'8; $P_{77} = 7$

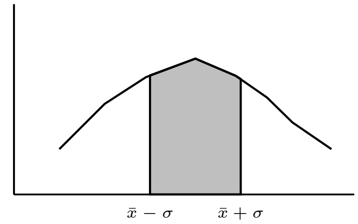
3. Si tenemos varios grupos de medias y número de datos $\bar{x}_A, N_A$; $\bar{x}_B, N_B$; $\bar{x}_C, N_C \ldots$ respectivamente la media de la unión de las distribuciones es:
   $\bar{x} = \dfrac{\bar{x}_A \cdot N_A + \bar{x}_B \cdot N_B + \bar{x}_C \cdot N_C + \ldots}{N_A + N_B + N_C + \ldots}$ es lo que se llama media ponderada
   Ejemplo: Un granjero tiene una explotación con dos establos de vacas. Cada uno de los 13 animales del primero produce una media de 30 litros de leche por día, mientras que en otro hay 17 animales y la media es de 28 litros. ¿Cual es la producción media por vaca y día de la explotación?.
   $\bar{x} = \dfrac{30 \times 13 + 28 \times 17}{30} = 28'86$ litros
   nota: no hay fórmula análoga para la desv. típica.

4. Para polígonos de frecuencias unimodales y aproximadamente simétricos se tiene la relación empírica:

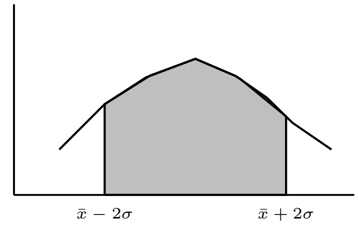
   media − moda ≈ 3(media - mediana)



5. Para polígonos de frecuencias unimodales y aproximadamente simétricos se tienen las relaciones:

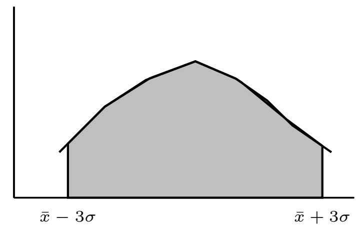


en el intervalo: $(\bar{x}-\sigma, \bar{x}+\sigma)$ se encuentra aproximadamente el 68 % de los datos



en el intervalo: $(\bar{x}-2\sigma, \bar{x}+2\sigma)$ se encuentra aproximadamente el 95 % de los datos

en el intervalo: $(\bar{x}-3\sigma, \bar{x}+3\sigma)$ se encuentra aproximadamente el 99 % de los datos



6. **Tipificación de variables**

   Dada una serie estadística x_i, se llaman puntuaciones típicas a los valores: $\dfrac{x_i-\bar{x}}{\sigma}$

   Sirven para comparar puntuaciones de un individuo en distintas distribuciones.

   Ejemplo Un alumno ha contestado a dos tests, obteniendo las siguientes puntuaciones: Test A: 50 puntos, Test B: 32 puntos. La puntuación media y las desviaciones típicas del curso en los dos tests han sido:

   Test A: $\bar{x}_A = 45, \quad \sigma_A = 6$

   Test B: $\bar{x}_B = 26, \quad \sigma_B = 2$

   ¿En cuál de los dos tests ha obtenido, comparativamente con el grupo, mejor resultado el alumno?

   Test A puntuación típica: $\dfrac{50-45}{6} = 0'83$

   Test B puntuación típica $\dfrac{32-26}{2} = 3$

   Comparado con el resto del grupo el alumno ha obtenido mejor puntuación en el segundo test.

7. La desviación típica viene dada también por:

   Desviación típica sin frecuencias: $\sigma = \sqrt{\dfrac{\Sigma x_i^2}{N} - \bar{x}^2}$

   Desviación típica con frecuencias: $\sigma = \sqrt{\dfrac{\Sigma x_i^2 n_i}{\Sigma n_i} - \bar{x}^2}$

8. En todos los cálculos en vez de n_i podríamos utilizar frecuencias relativas f_i, pues es dividir numerador y denominador por Σn_i:

   Media: $\bar{x} = \Sigma x_i f_i$

Desviación típica: $\sigma = \sqrt{\Sigma(x_i - \bar{x})^2 f_i} = \sqrt{\Sigma x_i^2 f_i - \bar{x}^2}$

Problemas de Variables Estadísticas

1. Dada la distribución de frecuencias :

x_i	n_i
1	9
2	22
3	13
4	23
5	8
6	25

a) Constrúyase una tabla en la que aparezcan frecuencias absolutas, relativas y absolutas acumuladas. b) Represéntese mediante un diagrama de barras la distribución dada y su correspondiente polígono de frecuencias.

2. Completar los datos que faltan en la tabla siguiente:

x_i	n_i	f_i	N_i	F_i
10	2	0'05	2	0'05
13	4	0'1	6	0'15
16			16	0'4
19	15			
22	6	0'15	37	0'925
25				1

3. a) La frecuencia absoluta de un dato estadístico es 48 y su frecuencia relativa es 0'03. ¿Cuál es el número de datos.

b) En un curso de 25 alumnos han aprobado 17. Hacer un diagrama de sectores de aprobados y suspensos.

4. (Sin calculadora estadística) Dados los datos y sus frecuencias. a) Hallar la media. b) Hallar la desviación típica.

x_i	n_i	$x_i \cdot n_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2 \cdot n_i$
5	7	35	-3	9	63
7	13	91	-1	1	13
10	12	120	2	4	48
13	2	26	5	25	50
	$\Sigma n_i = 34$	$\Sigma x_i n_i = 272$			$\Sigma(x_i - \bar{x})^2 \cdot n_i = 174$

Media: $\bar{x} = \dfrac{\Sigma x_i n_i}{\Sigma n_i} = \dfrac{272}{34} = 8$

Varianza: $\sigma^2 = \dfrac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2 n_i}{\Sigma n_i} = \dfrac{174}{17} = 5'11$

Desviación típica: $\sigma = \sqrt{\dfrac{174}{17}} = 2'26$

5. Hallar las medidas estadísticas de la distribución de frecuencias del problema 1.

Solución: media = 3'74, mo = 6, mediana = 4, des.tip. = 1'68, var = 2'83, des.med = 1'45

6. Construir la tabla estadística y calcular la media, varianza y desviación típica para la distribución, (4,3) (5,4) (6,3) (9,2) (10,1), donde la primera coordenada es el valor que toma la variable estadística y la segunda es el número de individuos existentes en la muestra con ese valor.

Solución: media = 6, mo = 5, mediana = 5, des.tip. = 1'96, var = 3'85

7. (Sin calculadora estadística) Dados los datos y sus frecuencias. a) Hallar la media. b) Hallar la desviación típica.

x_i	n_i	$x_i \cdot n_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2 \cdot n_i$
5	8	40	-4	16	128
8	16	128	-1	1	16
13	12	156	4	16	192
	$\Sigma n_i = 36$	$\Sigma x_i n_i = 324$			$\Sigma(x_i - \bar{x})^2 \cdot n_i = 336$

Media: $\bar{x} = \dfrac{\Sigma x_i n_i}{\Sigma n_i} = \dfrac{324}{36} = 9$

Varianza: $\sigma^2 = \dfrac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2 n_i}{\Sigma n_i} = \dfrac{336}{36} = 9'3$

Desviación típica: $\sigma = \sqrt{\dfrac{336}{36}} = 3'05$

8. El número de hijos de 10 familias, seleccionadas aleatoriamente, es el siguiente: 5, 2, 0, 6, 3 ,1, 2, 3, 1, 4. Hallar la mediana y la varianza.

Solución: media = 2'7, des.tip. = 1'79, mediana = 2'5, var = 3'21

9. Durante el mes de julio, en una determinada ciudad de la costa levantina, se han registrado las siguientes temperaturas máximas: 32, 31, 28, 28, 33, 32, 31, 30, 31, 27, 28, 29, 29, 30, 32, 31, 31, 30, 30, 29, 29, 29, 30, 31, 30, 34, 33, 33, 32, 33, 32 Hallar el recorrido y la varianza.

Solución: moda = 30, 31, media = 30'58, des.tip. = 1'74, var = 3'02

10. Coger una moneda y efectuar 10 series de 5 tiradas de esa moneda. Se considera la variable estadística "número de caras en cada serie"

    a) Hacer la tabla de frecuencias absolutas y relativas.

    b) Dibujar el polígono de frecuencias absolutas.

    c) Dibujar el polígono de frecuencias relativas.

    d) Hallar la media y la desviación típica.

11. Una variable estadística tiene las siguientes frecuencias relativas:

x_i	0	1	2	3
f_i	0'4	0'3	0'2	0'1

    a) Dibujar el polígono de frecuencias relativas.

    b) Hallar la media y la desviación típica.

    c) Hallar la frecuencia relativa acumulada del valor $x_i = 2$

    a) Hallar las frecuencias relativas.

    b) Hallar la media y la desviación típica.

12. A dos grupos de ocho profesores de letras (grupo A) y de ciencias (grupo B) se les ha planteado un test de cultura general con cien preguntas, arrojando el siguiente número de contestaciones acertadas:

Grupo A:	46	48	49	50	50	51	52	54
Grupo B:	10	18	30	50	50	70	82	90

    Halla para cada uno de los grupos la media, moda y mediana, así como la desviación típica. Interpreta los resultados.

    Grupo A media $= \bar{x} = \frac{\Sigma x_i}{N} = 50$, desviación típica $= \sigma = \sqrt{\frac{\Sigma(x_i-\bar{x})^2}{N}} = 2'29$

    Moda = 50, Mediana = 50

    Grupo B

    media $= \bar{x} = 50$, desviación típica $= \sigma = 27'50$

    Moda = 50, Mediana = 50

    Aunque por término medio son igualmente cultos los de letras que los de ciencias, las culturas de los de letras son muy parecidas ($\sigma = 2'29$) mientras que entre los de ciencias los hay notablemente cultos y notablemente incultos. (Todo ello según el criterio de quien ha inventado los datos de este problema).

13. Calcular la media y la desviación típica de los datos de la tabla adjunta que resume la observación hecha a 30 niños de edad en meses a la que empiezan a andar

MESES	9	10	11	12	13	14	15
FRECUENCIA	1	2	4	13	6	3	1

    media $= \bar{x} = \frac{\Sigma x_i n_i}{\Sigma n_i} = \frac{364}{30} = 12'13$

    desviación típica $= \sigma = \sqrt{\frac{\Sigma(x_i-\bar{x})^2 n_i}{\Sigma n_i}} = 1'26$

14. Represéntese mediante un histograma la siguiente distribución de frecuencias. Hacer el polígono de frecuencias acumuladas.

L_{i-1} - L_i	n_i
0-10	22
10-20	26
20-30	92
30-40	86
40-50	74
50-60	27
60-70	12

15. En un reclutamiento militar se ha tomado una muestra de dieciseis jóvenes obteniéndose las siguientes estaturas en cms. : 172, 161, 168, 182, 167, 179, 175, 198, 180, 166, 164, 174, 185, 177, 191, 173 Agrupar los datos en intervalos de 10 cms. Escribir la tabla estadística y calcular la media y la desviación típica: a) directamente, b) agrupando los datos.

    nota: aunque no lo concreta el problema tomar como extremo más pequeño 160 para unificar: $[160 - 170)\ldots$

    Solución: a)media = 175'75, des.tip. = 9'38 b) media = 176'625, des.tip. = 9'66

16. Durante el mes de julio, en una determinada ciudad de la costa levantina, se han registrado las siguientes temperaturas máximas: 32, 31, 28, 28, 33, 32, 31, 30, 31, 27, 28, 29, 29, 30, 32, 31, 31, 30, 30, 29, 29, 29, 30, 31, 30, 34, 33, 33, 32, 33, 32 Hallar, la moda y los percentiles de orden 30 y 70

Solución: moda = 30, 31, P_{30} = 30, P_{70} = 32

17. Un Instituto tiene dos grupos de 2^0. El grupo A tiene 35 alumnos ha obtenido en matemáticas una nota media de 6'3. Para el grupo B que tiene 40 alumnos la nota media es de 4'4. Calcular la nota media de Matemáticas de 2^0 en el Instituto.

    Solución: media = 5'28

18. Juan tiene 19 años de edad y mide 1'90 m de estatura. Se dice que su talla está en el percentil 92 para los jóvenes de 19 años. ¿Qué quiere decir ésto?.

19. En una encuesta a 200 personas casadas se les ha preguntado sobre la edad a la que se casaron, obteniéndose la siguiente tabla en la que figuran las edades agrupadas en intervalos:

edades	num. personas
$[20, 24)$	33
$[24, 28)$	97
$[28, 32)$	31
$[32, 36)$	20
$[36, 40)$	19

    Completar la tabla anterior con los representantes de clase, frecuencias acumuladas, etc... Calcular la clase modal, la media, y la desviación típica de la distribución anterior.

    Solución: media = 27'90, des.tip. = 4'65, var = 21'59, clase modal $[24, 28)$

20. En un grupo de sociología se han obtenido las siguientes puntuaciones en un test de habilidad mental: 50, 23, 45, 36, 56, 34, 56, 67, 45, 34, 23, 45, 23, 67, 54, 21, 34, 43, 12, 78, 36, 49, 53, 27, 66, 31, 45, 22, 33, 44, 48, 53, 57, 77, 31, 23, 47, 52, 33, 37, 64, 21. Comprobar si en el intervalo (media - des. tip., media + des. tip.) se encuentra aproximadamente el número de datos esperado.

    Solución: media = 42'73, des. tip. = 15'938

21. En el departamento de selección de personal de una empresa se ha aplicado un test de inteligencia a los mandos intermedios, obteniéndose los siguientes resultados: 63, 69, 71, 56, 58, 68, 73, 67, 65, 72, 78, 56, 68, 65, 72, 58, 68, 71, 63, 71, 65, 77, 51, 81, 67, 67, 65, 66, 68, 69, 61, 65, 70.

    a) Hallar los cuartiles y el recorrido intercuartílico.

    b) Los percentiles de orden 90 y 10, y el recorrido interdecílico.

    nota: no agrupar en intervalos

    Solución: Q_1 = 65, Q_2 = 67, Q_3 = 71, Q_3 - Q_1 = 6, P_{90} = 73 , P_{10} = 58 , P_{90} - P_{10} = 15

22. Las pérdidas, en millones de pesetas, de cinco empresas durante los dos últimos años han sido las siguientes:

Empresas	1986	1987
A	1500	2300
B	1200	2000
C	500	600
D	300	700
E	1100	1600

    ¿En qué año perdió más, comparativamente con las otras empresas del grupo, la empresa C?

    Solución: 1986 media = 920, des.tip. = 449 val.tip. = -0'935 (pierde más); 1987 media = 1440, des.tip. = 682'93 val. tip = -1,229

23. (Sin calculadora estadística) Dados los pares de números: $(15, 10), (19, 15), (28, 18), (32, 7)$ Si la primera coordenada es el valor de la variable estadística y la segunda la frecuencia:

    a) Hallar la media

    b) Hallar la desviación típica

    Solución: a) media= 23,26 des. tip.= 6,15 N= 50

24. Efectuar 10 series de 5 tiradas de una moneda. Se considera la variable estadística "número de caras en cada serie"

    a) Hacer la tabla de frecuencias absolutas y relativas.

    b) Dibujar el polígono de frecuencias absolutas.

    c) Dibujar el polígono de frecuencias relativas.

    d) Hallar la media y la desviación típica.

25. Un tirador hace 60 series de 5 disparos. La frecuencia relativa acumulada de número de aciertos en cada serie viene dada por la tabla:

x_i	0	1	2	3	4	5
F_i	0'12	0'31	0'59	0'77	0'93	1

a) Hallar las frecuencias relativas y hacer un diagrama de barras de ancho uno.

b) Hallar la media y la desviación típica.

10. VARIABLES ALEATORIAS. DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD

10.1. Variable aleatoria. Función de distribución de probabilidad

Es el modelo matemático de la variable estadística. Se dice que hemos definido una variable aleatoria X (v.a.) para un experimento aleatorio cuando hemos asociado un valor numérico a cada resultado del experimento.

Ejercicio Imagínese un juego de apuestas con estas normas: Se lanza un dado normal y se cobra 3 euros si sale 1 o 2, 1 euro si sale 4, 5 o 6 y se pagan 5 euros si sale un 3. Se lanza el dado 60 veces y se obtienen los siguientes resultados:

3, 4, 6, 1, 3, 1, 1, 5, 6, 6, 1, 1, 6, 1, 5, 6, 2, 2, 3, 2, 6, 4, 6, 2, 5, 6, 1, 1, 3, 2, 4, 5, 5, 3, 2, 5, 6, 5, 3, 5, 2, 6, 1, 4, 6, 1, 5, 5, 5, 5, 2, 4, 3, 3, 1, 4, 5, 2, 2, 6

Se considera la variable estadística que dé las ganancias y pérdidas:

1) Hacer la tabla de frecuencias absolutas y relativas.

2) Dibujar el diagrama de frecuencias y el polígono de frecuencias.

número	1	2	3	4	5	6
frecuencia	11	10	8	6	13	12

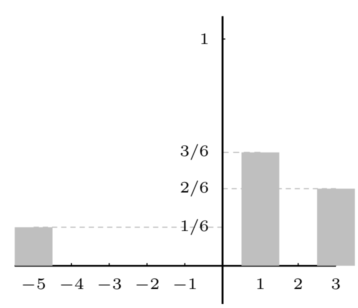
número	var. estad. X	frecuencia n_i	frec. relativa f_i
{ 3 }	-5	8	0'13
{ 4,5,6 }	1	31	0'51
{ 1,2 }	3	21	0'35
		$\Sigma N_i = 60$	

Ejemplo 1) Considérese el juego anterior: Se lanza un dado normal y se cobra 3 euros si sale 1 o 2, 1 euros si sale 4, 5 o 6 y se pagan 5 euros si sale un 3. La v.a. que describe las posibles ganancias en este juego es $X(1) = 3, X(2) = 3, X(3) = -5, X(4) = 1, X(5) = 1, X(6) = 1$.

10.2. Tabla de probabilidades de una variable aleatoria discreta. Histograma de Probabilidad

A cada valor que toma la variable le asociamos la probabilidad del suceso que representa así obtenemos la tabla de probabilidades de una variable aleatoria discreta:

x_i	-5	1	3
p_i	1/6	3/6	2/6



Tomando intervalos de longitud uno con centro en los valores de la v.a. x_i tenemos el **histograma de probabilidad** de la v.a. X.

En el histograma de probabilidad la suma de las áreas de los rectángulos hasta un valor x_i (incluido el suyo) da la probabilidad $p(X \leq x_i)$.

Función de distribución de la v.a. X es la función que a cada número le asigna la probabilidad acumulada hasta ese número, se suele expresar: $F(x) = p(X \leq x)$

En el ejemplo: $F(2'5) = p(X \leq 2'5) = p(X = -5) + p(X = 1) = \frac{1}{6} + \frac{3}{6}$

10.3. Relación entre variables estadísticas y aleatorias

Para muestras grandes las frecuencias relativas tienden a las correspondientes probabilidades, lo cual nos permite considerar a las funciones de probabilidad como el modelo teórico de las frecuencias relativas, que son las que se pueden obtener en la práctica. Es lo que llamábamos probabilidad empírica.

Así por ejemplo en el problema que veremos más adelante:

."En la fabricación de automóviles de una determinada marca de cada 1.000 fabricados 10 resultan defectuosos por término medio. ¿Cuál es la probabilidad de que en un lote de cuatro automóviles más de la mitad sean defectuosos?"Se toma como probabilidad de que un automóvil resulte defectuoso $p = 10/1000 = 0'01$.

10.4. Parámetros de una variable aleatoria discreta

Se corresponden con los de una variable estadística, por ejemplo la media de una variable estadística es: media $\bar{x} = \dfrac{\Sigma x_i n_i}{\Sigma n_i} = \Sigma x_i f_i$

y la desviación típica: (des. tip.)$^2 = \dfrac{\Sigma x_i^2 . n_i}{\Sigma n_i} - \bar{x}^2 = \Sigma x_i^2 . f_i - \bar{x}^2$

Para una variable aleatoria discreta:

Esperanza matemática o media: $\mu = \Sigma x_i p_i$

Varianza: $\sigma^2 = \Sigma(x_i - \mu)^2 p_i = \Sigma x_i^2 p_i - \mu^2$

Desviación típica: $\sigma = \sqrt{\text{varianza}}$

Intuitivamente, si la variable aleatoria describe las ganancias y pérdidas de un determinado juego, la esperanza indica la ganancia media por partida que puede esperar un jugador. Si la esperanza es cero se dice que el juego es equitativo; en caso contrario, es favorable o desfavorable al jugador según que la esperanza sea positiva o negativa.

La desviación típica determina, junto con la esperanza, el intervalo $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$ en el que se espera se produzcan "la mayoría de los resultados".

En el ejemplo resultaría:

$E(X) = \dfrac{1}{6}(-5) + \dfrac{3}{6}1 + \dfrac{2}{6}3 = \dfrac{4}{6} = 0'666$

$\sigma^2 = \dfrac{1}{6}(-5)^2 + \dfrac{3}{6}1^2 + \dfrac{2}{6}3^2 - \left(\dfrac{4}{6}\right)^2 = \dfrac{260}{36} = 7'222; \quad \sigma = \sqrt{7'222} = 2'68$

10.5. Distribución binomial

Ejemplo En una bolsa hay 2 bolas blancas y 3 negras. Hacemos tres extracciones con devolución. Consideramos el número de bolas blancas que hemos sacado.

VARIABLE ESTADÍSTICA

Se han hecho diez series de tres extracciones: el número de bolas blancas en cada serie ha sido: 1, 1, 1, 3, 1, 2, 2,0, 2, 0.

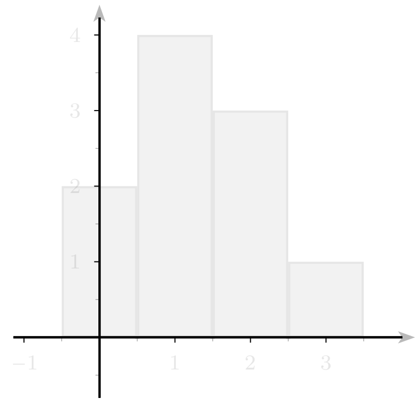
a) Hacer la tabla de frecuencias y hacer un diagrama de barras de ancho uno.
b) Hallar las frecuencias relativas y hacer un diagrama de barras de ancho uno.
c) Hallar la media y la desviación típica.
VARIABLE ALEATORIA
a) Diagrama en árbol de la experiencia aleatoria: Hacemos tres extracciones con devolución.
b) Hacer la tabla de probabilidades y el histograma de probabilidad.
c) Calcular la media y la desviación típica

Solución:

VARIABLE ESTADÍSTICA

a)
frecuencias absolutas

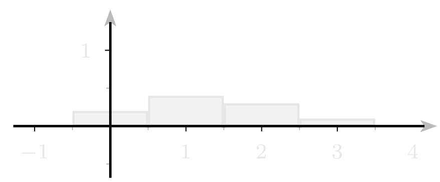
x_i	0	1	2	3
n_i	2	4	3	1



b)

frecuencias relativas

x_i	0	1	2	3
f_i	0'2	0'4	0'3	0'1



c)

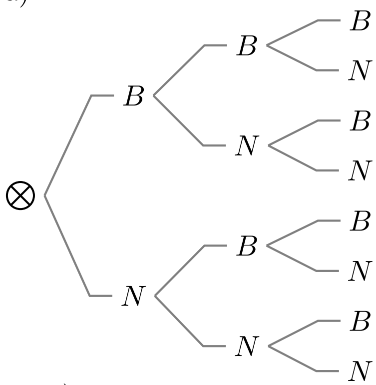
x_i	f_i	$x_i.f_i$	x_i^2	$x_i^2.f_i$
0	0'2	0	0	0
1	0'4	0'4	1	0'4
2	0'3	0'6	4	1'2
3	0'1	0'3	9	0'9
		$\Sigma x_i f_i = 1'3$		$\Sigma x_i^2.f_i = 2'5$

Media: $\bar{x} = \Sigma x_i f_i = 1'3$

Desviación típica: $\sigma = \sqrt{\Sigma x_i^2 f_i - \bar{x}^2} = \sqrt{2'5 - 1'3^2} = \sqrt{0'81} = 0'9$

VARIABLE ALEATORIA

a)



b)

$p(3 \text{ blancas}) = \left(\frac{2}{5}\right)^3 = 0'064$

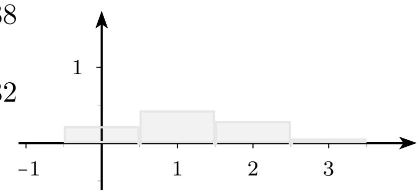
$p(2 \text{ blancas}) = 3 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot \frac{3}{5} = 0'288$

$p(1 \text{ blancas}) = 3 \cdot \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 0'432$

$p(0 \text{ blancas}) = \left(\frac{3}{5}\right)^3 = 0'216$

probabilidad

x_i	0	1	2	3
p_i	0'216	0'432	0'288	0'064



c)

x_i	p_i	$x_i.p_i$	x_i^2	$x_i^2.p_i$
0	0'216	0	0	0
1	0'432	0'432	1	0'432
2	0'288	0'576	4	1'152
3	0'064	0'192	9	0'576
		$\Sigma x_i p_i = 1'2$		$\Sigma x_i^2.p_i = 2'16$

Media: $\mu = \Sigma x_i p_i = 1'2$

Desviación típica: $\sigma = \sqrt{\Sigma x_i^2 p_i - \mu^2} = \sqrt{2'16 - 1'2^2} = \sqrt{0'72} = 0'84852$

Ejemplo En el lanzamiento de un dado se considera éxito obtener 5 o más puntos y fracaso lo contrario, por tanto probabilidad de éxito: $p = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, probabilidad de fracaso: $q = \frac{2}{3}$. Supongamos que se hacen 10 pruebas.

Se trata de la distribución binomial $B(10, \frac{1}{3})$, consideremos la variable aleatoria: X = número de éxitos en las 10 pruebas

Hallemos la probabilidad de tener 4 éxitos (y por tanto 6 fracasos), o sea de $X = 4$:

La probabilidad de tener 4 éxitos y 6 fracasos en un orden determinado, como los lanzamientos son independientes, es: $p.p.p.p.q.q.q.q.q.q = p^4.q^6$; como el orden no nos importa el suceso tener cuatro éxitos es la unión de los sucesos del tipo anterior, hay $\binom{10}{4}$ de estos sucesos (que son las posibilidades de ."escoger"las cuatro tiradas con éxito entre las 10) por tanto la probabilidad buscada de $X = 4$, es sumar $\binom{10}{4}$ veces la cantidad $p^4.q^6$:

$p(X = 4) = \binom{10}{4} p^4 q^6 = 210. \left(\frac{1}{3}\right)^4 . \left(\frac{2}{3}\right)^6 = 0'7868$

En general:

Distribución binomial $B(n, p)$**:** Es la distribución de probabilidad de una variable aleatoria discreta que tiene las características:

1) En el experimento aleatorio se consideran dos resultados posibles "éxito" y su contrario "fracaso".

2) En una prueba la probabilidad de éxito es p y la de fracaso es $q = 1 - p$

3) La probabilidad no cambia en las sucesivas pruebas, son independientes.

4) La variable aleatoria discreta es: X = número de éxitos en n pruebas,

Entonces la probabilidad viene dada por:

$$\boxed{p(X=x)=\binom{n}{x}\cdot p^x\cdot q^{n-x} \text{ con } q=1-p}$$

Los parámetros de la binomial son: $\mu = n.p, \quad \sigma^2 = n.p.q$

Ejemplo En la fabricación de automóviles de una determinada marca de cada 1.000 fabricados 10 resultan defectuosos por término medio. Cuál es la probabilidad de que en un lote de seis automóviles
a) haya 2 defectuosos
b) más de la mitad sean defectuosos
c) haya alguno defectuoso
d) hallar la media y la desviación típica

Sea $p = 0'01$ la probabilidad de ser defectuoso; $B(6, 0'01)$
a) $p(X=2)=\binom{6}{2}p^2q^4 = 15{,}0'01^2{,}0'99^4 = 0'0014$
b) $p(X \geq 4) = p(X=4)+p(X=5)+p(X=6) = \binom{6}{4}p^4q^2+\binom{6}{5}p^5q^1+\binom{6}{6}p^6q^0 = 15{,}0'01^4{,}0'99^2+6{,}0'01^5{,}0'99+0'01^6$
c) Mejor hacerlo por suceso contrario: $p(X \geq 1) = 1-p(X=0) = 1-\binom{6}{0}p^0q^6 = 1-1{,}0'99^6 = 1-0'9414 = 0'05852$
d) $\mu = 6{,}0'01 = 0'06, \quad \sigma^2 = 6{,}0'01{,}0'99 = 0'0594 \quad \sigma = \sqrt{0'0594}$
nota: [2]

10.6. Variable aleatoria continua

Hasta ahora hemos visto casos en los que la variable aleatoria toma unos valores concretos. En estos casos se llama **variable aleatoria discreta**.
Pero hay otra posibilidad:

Ejemplo Lugar de rotura de una cuerda de 3 m al tirar de un extremo estando el otro fijo. El espacio muestral es $E =$ conjunto de lugares de rotura $= [0, 3]$. Consideramos la variable aleatoria:
$X =$longitud del punto de corte al punto fijo.

Vemos que la variable aleatoria puede tomar cualquier valor del intervalo $[0, 3]$. En este caso se llama **variable aleatoria continua**

10.7. Función de densidad de probabilidad de una v.a. continua

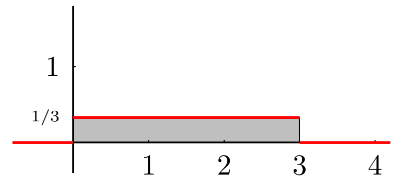
Ejemplo Lugar de rotura de una cuerda de 3 m al tirar de un extremo estando el otro extremo fijo.
$X =$longitud del punto de rotura al extremo fijo, puede tomar cualquier valor entre 0 y 3.

[2]Pueden ser útiles las siguientes propiedades de los números combinatorios:

$$\binom{m}{h}=\frac{m^{(h}}{h!} \qquad \binom{m}{h}=\binom{m}{m-h} \qquad \begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\ \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \end{array}$$

Consideremos: probabilidad $= \dfrac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}}$; la probabilidad de que se rompa en un punto determinado, $X = x_0$, es cero pues en este caso $\dfrac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \dfrac{1}{\text{infinito}} = 0$. Por ello:

Lo que podemos considerar es la probabilidad de que la v.a. tome un valor menor o igual que uno dado por ejemplo que se rompa antes de 2'5 metros.
$p(X \leq 2'5) = \dfrac{\text{longitud favorable}}{\text{longitud posible}} = \dfrac{2'5}{3}$

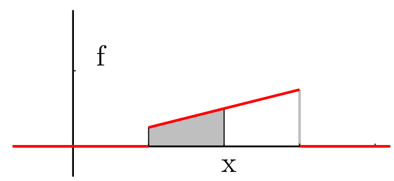


Para una v.a. continua no tiene sentido hablar de probabilidad de que la variable tome un determinado valor porque habría que dividir por "infinitos" casos posibles

Entonces como modelo teórico del polígono de frecuencias relativas, se introduce el concepto de **función de densidad de probabilidad** f:

Y la probabilidad viene dada por $p(X \leq x) =$ área bajo la función densidad entre el inicio de la gráfica y el valor x.

Por tanto se cumple que una función de densidad siempre es positiva y además el área bajo la función densidad vale 1.



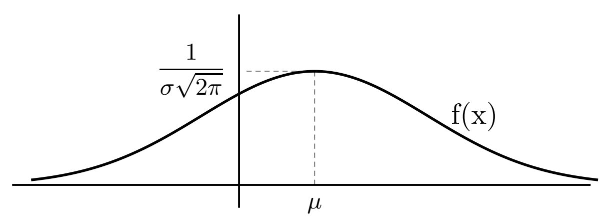
Función de distribución de la v.a. X es la función que a cada número le asigna la probabilidad acumulada hasta ese número, se suele expresar: $F(x) = p(X \leq x)$

10.8. Distribución normal

La variable aleatoria continua más utilizada es la normal su función de densidad de probabilidad es:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

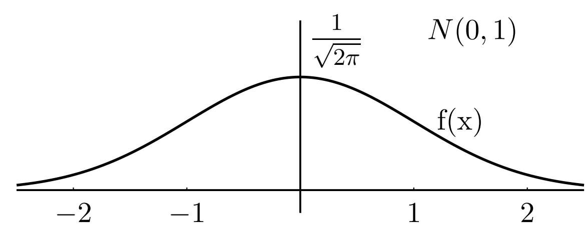
Se suele expresar $N(\mu, \sigma)$; los parámetros μ y σ son respectivamente el valor medio y la desviación típica, la curva se llama campana de Gauss.



La normal $N(0,1)$ tiene de función densidad:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

cuyos parámetros son $\mu = 0, \sigma = 1$, y tiene las probabilidades acumuladas por $f(x)$ tabuladas.



Para la $N(0,1)$ en nuestra tabla aparece $p(Z \leq z)$, siendo $z \geq 0$, para buscar otras probabilidades hay que utilizar la simetría de $f(z)$, y el complementario.

Ejercicios: Hallar: a) $p(Z \leq 0'34) =$ b) $p(Z < -2'85) =$ c) $p(Z \geq 2'1) =$
d) $p(Z \leq 3'8) =$ e) $p(-1 < Z \leq 2'37)$

Para hallar las probabilidades de una normal cualquiera $N(\mu, \sigma)$ se hace el cambio de variable (se llama tipificar) $z = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$ que la transforma en la normal $N(0,1)$.

Ejercicio: Hallar en $N(8,3)$ el valor de $p(X \leq 9'6)$

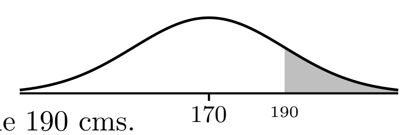
(Proceso inverso), en $N(0,1)$ hallar z_0 tal que $p(Z \leq z_0) = 0'8438$, resulta mirando en el cuerpo de la tabla $z_0 = 1'01$

Ejemplos

1. Se eligió una muestra de 1000 personas de una determinada población y resultó que su talla media era de 170 cm, con una desviación típica de 10 cm. Suponiendo que las tallas se distribuyen normalmente, calcúlese cuantas personas de esa muestra miden: a) Más de 190 cm; b) Entre 160 y 190 cm.

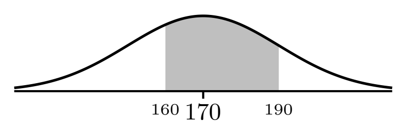
   La v.a. X que describe las tallas de la población es del tipo $N(170,10)$.

   a)
   $p(X > 190) = \left\{ \text{tipificando } z = \dfrac{x-\mu}{\sigma} = \dfrac{190-170}{10} = 2 \right\} =$
   $p(Z > 2) = 1 - 0'9772 = 0'0228$

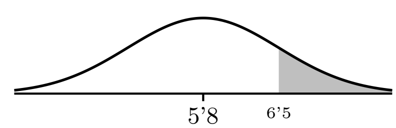
   Es de esperar que haya $0'0228{,}1000 = 22'8 \approx 23$ personas de más de 190 cms.

   b)
   $p(160 < X < 190) = \left\{ \begin{array}{l} z_1 = \frac{160-170}{10} = -1 \\ z_2 = \frac{190-170}{10} = 2 \end{array} \right\} = p(-1 < Z < 2) =$
   $\left\{ \begin{array}{l} p(z < 2) = 0'9772 \\ p(z < -1) = 1 - 0'8413 = 0'1587 \end{array} \right\} = 0'9772 - 0'1587 = 0'8185$
   O sea 818 personas aproximadamente medirán entre 160 y 190 cm.

2. En una prueba de selectividad se ha obtenido de nota media 5'8 y la desviación típica es 1'75. Suponemos que las notas están distribuidas normalmente. Todos los alumnos que sobrepasen la nota 6'5 serán admitidos en la universidad. ¿Qué porcentaje de admitidos cabe esperar?

   $p(X \geq 6'5) = \left\{ \text{tipificando } z = \dfrac{6'5 - 5'8}{1'75} = 0'4 \right\} = p(Z \geq 0'4) =$
   $1 - p(Z \leq 0'4) = 1 - 0'6554 = 0'3446$
   Este valor es el tanto por uno, el tanto por ciento será 34'46 % de admitidos.

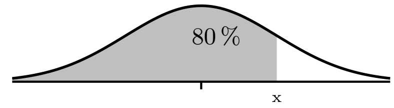
   

   Proceso inverso de buscar en la tabla. Dada la probabilidad hallar el valor de la variable aleatoria que le corresponde

   Ejercicio: En $N(0,1)$ hallar z_0 tal que $p(Z \leq z_0) = 0'8438$, resulta mirando en el cuerpo de la tabla:

3. En una normal $N(23,12)$, hallar el valor de la variable de manera que a su izquierda esté el 80 % de la probabilidad.

Al contrario que antes buscamos un x concreto tal que $p(X \leq x) = 0'8$

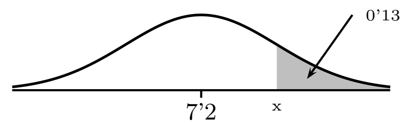


En la $N(0,1)$ tenemos que si $p(Z \leq z) = 0'8$, el valor más próximo de la tabla es $\left\{ \begin{array}{l} 0'7995 \text{ por defecto} \\ 0'8023 \text{ por exceso} \end{array} \right\}$ nos quedamos con $0'7995$ que corresponde con $z = 0'84$.

sustituyendo en la tipificación: $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$, $\quad x = \sigma z + \mu = 12z + 23 = 12{,}0'84 + 23 = 33'08$

4. En una oposición la puntuación media del último examen fue 7'2 y la desviación típica 0'9. Hay plazas para un 13 % de los presentados. ¿Cuál es la puntuación mínima que un estudiante debe tener para conseguir plaza en la oposición?.

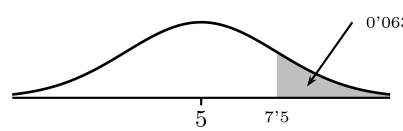
   Buscamos un x concreto tal que $p(X \geq x) = 0'13$

   Sabemos que $p(X \geq x) = 0'13$, en la $N(0,1)$ para buscar en la tabla tenemos: $p(Z \geq z) = 0'13$, corresponde con $p(Z \leq z) = 0'87$ el valor más próximo de la tabla es $\left\{ \begin{array}{l} 0'8686 \text{ por defecto} \\ 0'8708 \text{ por exceso} \end{array} \right\}$ nos quedamos con $0'8708$ que corresponde con $z = 1'13$.

   sustituyendo en la tipificación: $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$, $\quad x = \sigma z + \mu = 0'9z + 7'2 = 0'9{,}1'13 + 7'2 = 8'21$

5. Las puntuaciones de un examen calificado entre 0 y 10 puntos siguen una distribución normal de media $\mu = 5$. El 6'3 por ciento de los alumnos tiene una puntuación por encima de 7'5, ¿qué tanto por ciento de los alumnos es de esperar que tengan una puntuación por debajo de 4 puntos?

   Primero hemos de hallar σ :
   $p(X \geq 7'5) = 0'063$
   $p(Z \geq z) = 0'063 \longrightarrow p(Z \leq z) = 0'937$
   en las tablas: se obtiene $z = 1'53$
   el cambio $z = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$, $\quad 1'53 = \dfrac{7'5-5}{\sigma}$, $\quad$ despejando $\sigma = 1'63$
   Piden $p(X \leq 4) = p(Z \leq -0'61) = 1 - p(Z \leq 0'61) = 1 - 0'7291 = 0'2709$

   luego aproximadamente el 27'1 % de los alumnos sacará menos de 4.

Problemas de variable aleatoria.

1. Se tiene un dado correcto, pero de tal manera que tres caras tienen el número 2, dos caras el número 1 y una cara el número 3. Se considera la variable aleatoria X que asigna a cada resultado del dado el número obtenido.

   a) Hacer una tabla con las probabilidades.

   b) Representar el histograma de probabilidad.

   c) Hallar la media y la desviación típica.

   Solución:

x_i	1	2	3
p_i	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{1}{6}$

   $\mu = 11/6, \sigma = \sqrt{17}/6$

2. En una caja donde hay dos bolas blancas y tres negras se efectúa el siguiente experimento: se sacan dos bolas consecutivas sin reponer. Una bola blanca vale un punto y una negra, dos puntos. A cada extracción se asigna la suma de los puntos obtenidos obteniéndose así la variable aleatoria X.

   a) Espacio muestral.

   b) Hacer una tabla con las probabilidades.

   c) Representar el histograma de probabilidad.

   d) Hallar la media y la desviación típica.

   e) El mismo ejercicio reponiendo la bola cada vez.

   Solución: a) $E = \{bb, bn, nb, nn\}$ b) $R = \{2, 3, 4\}$,

   c)

x_i	2	3	4
p_i	$\frac{2}{20}$	$\frac{12}{20}$	$\frac{6}{20}$

   $\mu = 16/5, \sigma = 3/5$

3. Un tirador olímpico da en el blanco una media de 3 veces cada 5 disparos. Una competición es a tres disparos. Hallar la tabla de distribución aleatoria que considera el número de blancos. Representar la función de probabilidad. Hallar la probabilidad de hacer algún blanco. Hallar la media y la desviación típica.

   Solución:

x_i	0	1	2	3
p_i	0'064	0'288	0'432	0'216

   $\mu = 1'8, \sigma^2 = 0'72, p(\text{algún blanco}) = 0'936$

4. En la fabricación de automóviles de una determinada marca de cada 1.000 fabricados 10 resultan defectuosos por término medio. Se consideran lotes de 4 automóviles. Hallar la tabla de la distribución aleatoria que considera el número de defectuosos en un lote. Representar la función de probabilidad. ¿Cuál es la probabilidad de que en un lote de cuatro automóviles más de la mitad sean defectuosos?. Hallar la media y la desviación típica.

   Solución:

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0'96	0'038	0'0005	0'000004	$\left(\frac{1}{100}\right)^4$

   $\mu = 0'03912, \sigma = 0'19$

5. De cada 2.000 personas a los que se suministra cierto medicamento, 6 resultan alérgicas al mismo por término medio. Si en un determinado día se ha suministrado el medicamento a 400 personas, ¿cuál es la probabilidad de que haya al menos una alérgica?

   Solución: $p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - \binom{400}{0} p^0 q^{400} = 1 - 0'997^{400}$

6. En una urna hay cinco bolas blancas y cuatro bolas negras. Consideremos la variable aleatoria "número de bolas blancas.^{en} el experimento consistente en realizar seis extracciones con devolución. Determinar la probabilidad de obtener al menos cuatro bolas blancas.

   Solución: X_i = n^o de bolas blancas en 6 extracciones con devolución p(3 o menos blancas) = $p(x \leq 3) = F(3) = 0'7545$, p(al menos 4 blancas) = $1 - 0'7545$

7. La probabilidad de que un hombre al disparar pegue en el blanco es 1/3. Hallar y representar las funciones de probabilidad de la variable aleatoria "número de blancos en cinco disparos".

   Solución: $B(5, \frac{1}{3})$

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	0'12	0'31	0'31	0'15	0'03	0'0039

8. Una determinada raza de perros tiene cuatro cachorros en cada camada. Suponiendo que la probabilidad de que un cachorro

sea macho es de 0'55, se pide: a) Calcular la probabilidad de que en una camada dos exactamente sean hembras. b) Calcular la probabilidad de que en una camada al menos dos sean hembras.

Solución: a) 0'36, b) 0'609

9. En una urna que contiene tres bolas blancas y una negra se realizan tres extracciones con reemplazamiento. Hallar: a) La probabilidad de que una bola sea blanca y las otras dos negras. b) La probabilidad de que una bola al menos sea blanca. c) La tabla de distribución binomial para este caso. d) La representación gráfica de la funciones de probabilidad.

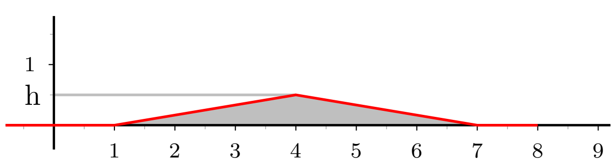
   Solución: X= sacar blanca, B(3,3/4), a) $p(X = 1) = 9/64 = 0'1406$, b) $p(X \geq 1) = 1 - p(X < 1) = 1 - 0'0156 = 0'9844$

X_i	0	1	2	3
P_i	0'015	0'1406	0'4218	0'4218
F_i	0'015	0'1562	0'578	1

10. En una prueba de selectividad se suspende al 15 % de los estudiantes. a) Hallar el número esperado (o media) de los alumnos suspendidos y la desviación típica si, entre los estudiantes presentados se eligen 2.000. b) Hallar la probabilidad de que suspendan de un grupo de 6 alumnos: I) como máximo 2; II) por lo menos la mitad.

    Solución: a) Bin(2000,0'15) prob susp 0'15, media np = 300, destip $\sqrt{npq} = \sqrt{255}$ b) B(6,0'15) I) $p(X \leq 2) = p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2) = \sum_{x=0}^{2} \binom{6}{x} 0'15^x, 0'85^{6-x} = 0'9526$, $p(X \geq 3) = 1 - p(X \leq 2) = 1 - 0'9526 = 0'04735$

11. Dada la función de gráfica:



    a) Hallar h para que cumpla las condiciones de función de densidad de probabilidad.

    b) Hallar las siguientes probabilidades:

    $P(X \leq 2)$

    $P(X \leq 6)$

    $P(X \geq 10)$

    $P(3 \leq X \leq 6)$

12. Calcular las siguientes probabilidades en la normal $N(0, 1)$ a) $p(z \leq 2'78)$; b) $p(z \leq -0'94)$; c) $p(z \leq -1'7)$; d) $p(-1'24 \leq z \leq 2'16)$

    Solución: a) 0'9973, b) 0'1736, c) 0'0446, d) 0'8771

13. Calcular las siguientes probabilidades en la normal $N(3, 5)$ a) $p(x \leq 4'3)$; b) $p(x < -1)$; c) $p(2 \leq x \leq 10)$

    Solución: a) 0'6026, b) 0'2119, c) 0'9192-0'4207=0'4985

14. Se supone que la estancia de los enfermos en un hospital sigue una distribución normal de media 8 días y desviación típica 3. Calcular la probabilidad de que la estancia de un enfermo, a) sea inferior a 7 días; b) sea superior a 3 días; c) esté comprendida entre 10 y 12 días.

    Solución: a) 0'3708, b) 0'9515, c) 0'1628

15. Se llama cociente intelectual al cociente entre la edad mental y la edad real. Se sabe que la distribución de los cocientes intelectuales de 2.000 reclutas sigue una distribución normal de media 0'80 y desviación típica 0'50. a) Número de reclutas con cociente intelectual comprendido entre 0'7 y 1'2. b) Id. inferior a 0'3. c) Id. inferior a 0'9. d) Id. superior a 1'4.

    Solución: a) 0'3674.2000 ≈ 735, b) 0'1587.2000 ≈ 318, c) ≈ 1159, d) ≈ 230

16. La media de las calificaciones obtenidas en las pruebas de acceso a la Universidad en cierta convocatoria fue $\mu = 4'7$ con una desviación típica $\sigma = 1'3$. Suponiendo que las calificaciones siguen una distribución normal, calcular: i) El porcentaje de aprobados. ii) El porcentaje de alumnos que obtuvo entre 4 y 6 puntos. iii) El porcentaje de alumnos que obtuvo menos de 3 puntos iv) El porcentaje de alumnos que obtuvo más de ocho puntos.

Solución: N(4'4,1'3) i) $p(X \geq 5) = 40'9\,\%$ ii) $p(4 \leq X \leq 6) = 54'32\,\%$ iii) $p(X \leq 3) = 9'68\,\%$ iv) $p(X \geq 8 = 0'57\,\%$

17. Las estaturas de 500 reclutas están distribuidas normalmente con una media de 169 cms y una desviación típica de 7 cms. Calcular el número de reclutas cuya altura, i) está entre 165 y 175 cms ii) es mayor de 180 cms.

    Solución: N(169,7) i) $p(X \leq 175) = 0'823$, $p(X \leq 165 = 0'2843$, $p(165 \leq x \leq 175) = 0'518$ ii) $p(X > 180) = 0'0582$

    $p(4 \leq X \leq 6) = 54'32\,\%$ iii) $p(X \leq 3) = 9'68\,\%$ iv) $p(X \geq 8 = 0'57\,\%$

18. Considérese la siguiente tabla de frecuencias agrupadas:

Intervalo	3'5-6'5	6'5-9'5	9'5-12'5	12'5-15'5
Frecuencia	3	5	9	6

    a) Dibujar el correspondiente histograma y calcular la media y la desviación típica. b) Calcular la probabilidad de que una variable Normal de media y desviación típica iguales a las obtenidas en el apartado a) sea mayor que 12'5.

    Solución: $\bar{x} = 10'35$, $\sigma = 2'93$, $p(X > 12'5) = 23'27\,\%$

19. Un profesor realiza un test de cien items a un curso con doscientos cincuenta alumnos. Suponiendo que las puntuaciones obtenidas por los alumnos siguen una distribución normal de media 64 puntos y desviación típica 10 puntos y denotando con $p(X \leq n)$ la probabilidad de obtener n puntos como máximo y con $p(X \geq n)$ la probabilidad de obtener al menos n puntos. Calcular: i) $p(X \geq 60)$, $p(X \leq 75)$, $p(30 \leq X \leq 60)$ ii) Número de alumnos que se espera que tengan al menos 45 puntos.

    Solución: i) $p(X \geq 60) = 65'5\,\%$, $p(X \leq 75) = 86'43\,\%$, $p(30 \leq X \leq 60) = 34'43\,\%$ $ii)0'9713{,}250 \approx 243$ alumnos

20. En una carrera la media del tiempo empleado ha sido de 73 minutos y la desviación típica 7 minutos. Se elimina al 5 % de los corredores. A partir de qué tiempo queda eliminado un corredor.

    Solución: se eliminan los que tardan más de 84'48 minutos

21. Una máquina ha producido 1.000 varillas de en teoría 1 m de longitud, con una desviación típica de 0'8 mm. De ellas se necesitan 640. ¿Entre qué medidas habrá que tomar las varillas para quedarse con las más exactas?.

    Solución: N(1000,0'8)) $p(-a < z < a) = 0'64$, $p(z \leq a) = 0'82$, $a = 0'9153$, $x_a = 1000'73$ hay que tomarlas entre 999'27 y 1000'73

DISTRIBUCIÓN NORMAL

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0,1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0,2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0,3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0,4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0,5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0,6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0,7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0,8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0,9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1,1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1,2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1,3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1,4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1,5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1,6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1,7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1,8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1,9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2,1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2,2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2,3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2,4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2,5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2,6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2,7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2,8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2,9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3,1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3,2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3,3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3,4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998
3,5	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998
3,6	.9998	.9998	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999
3,7	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999
3,8	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

11. REGRESION. CORRELACION

11.1. Variables estadísticas bidimensionales

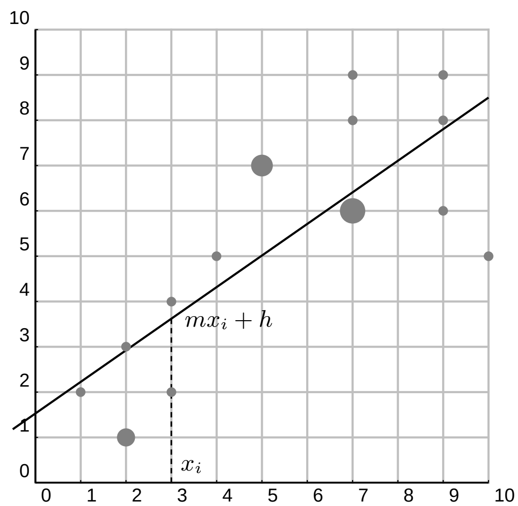
Cuando estudiamos dos variables estadísticas puede interesar ver si están relacionados sus valores, por ejemplo en las calificaciones en dos asignaturas, Física y Matemáticas, de 20 alumnos, cabe esperar que a una nota alta en Física corresponda otra alta en Matemáticas.

Para ello se consideran simultáneamente las dos variables estadísticas, se tiene entonces una **variable estadística bidimensional**.

Consideremos en el ejemplo anterior las calificaciones:

Física: x_i	2	4	5	9	9	10	7	3	2	5	7	9	7	3	7	7	5	1	2	7
Matemáticas: y_i	3	5	7	9	6	5	6	4	1	7	6	8	6	2	8	6	7	2	1	9

Podemos representar en el plano cada pareja de valores, obtenemos así los **diagramas de dispersión** llamados también **nube de puntos**. Estos puntos no se situarán sobre una línea determinada (a diferencia de las funciones, en los que cada valor de una variable determina el valor de la otra), pero cuando hay dependencia entre los valores sí aparece cierta forma en la nube.



Se llama ajuste de la nube de puntos, al problema de encontrar la línea que mejor se adapta a la nube de puntos. Nos limitaremos a encontrar rectas. Una vez halladas nos darán el valor más probable para una de las variables correspondiente a un valor dado de la otra.

Recta de regresión de y sobre x: Es la recta $y = mx + h$, de manera que el error cometido al tomar como valor y_i correspondiente a x_i, el dado por la recta: $y = mx_i + h$ sea mínimo, o sea la recta que hace mínimas las diferencias $y_i - (mx_i + h)$.

m se llama **coeficiente de regresión de y sobre x**

11.2. Cáculo de los parámetros de una variable estadística bidimensional

x_i	y_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$y_i - \bar{y}$	$(y_i - \bar{y})^2$	$(x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})$
9	9	0	0	2	4	0
7	7	-2	4	0	0	0
8	7	-1	1	0	0	0
12	5	3	9	-2	4	-6
$\Sigma x_i = 36$	$\Sigma y_i = 28$		$\Sigma(x_i - \bar{x})^2 = 14$		$\Sigma(y_i - \bar{y})^2 = 8$	$\Sigma(x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y}) = -6$

Media de x: $\bar{x} = \dfrac{\Sigma x_i}{N} = \dfrac{36}{4} = 9$

Varianza de x: $\sigma_x^2 = \dfrac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}{N} = \dfrac{14}{4} = 3'5$ Desviación típica de x: $\sigma_x = \sqrt{3'5} = 1'87$

Media de y: $\bar{y} = \dfrac{\Sigma y_i}{N} = \dfrac{28}{4} = 7$

Varianza de y: $\sigma_y^2 = \dfrac{\Sigma(y_i - \bar{y})^2}{N} = \dfrac{8}{4} = 2$ Desviación típica de y: $\sigma_y = \sqrt{2} = 1'41$

Covarianza. Se llama **covarianza** a la media de los productos de las desviaciones de las dos componentes de la variable bidimensional, $\boxed{\sigma_{xy} = \dfrac{\Sigma(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{N}}$

$$\sigma_{xy} = \frac{\Sigma(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{N} = \frac{-6}{4} = -1'5$$

Coeficiente de correlación. Viene dado por la covarianza dividida por el producto de las desviaciones típicas: $\boxed{r = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x . \sigma_y}}$

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x . \sigma_y} = \frac{-1'5}{\sqrt{3'5} \cdot \sqrt{2}} = -0'56$$

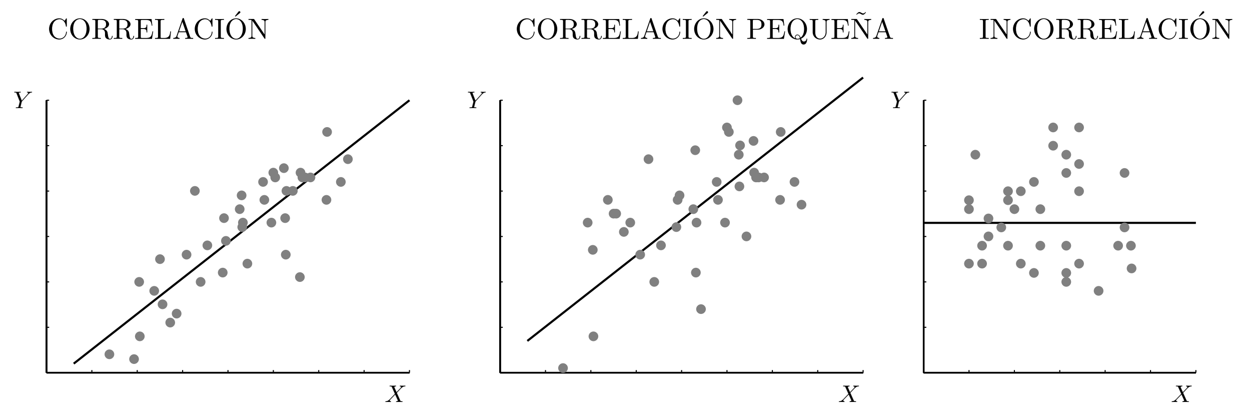
Recta de regresión y/x: $\boxed{y - \bar{y} = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}.(x - \bar{x})}$

$$y - 7 = \frac{-1'5}{3'5}(x - 9)$$

11.3. Correlación

Es el grado de mutua dependencia entre las dos variables estadísticas que componen la variable bidimensional.

Cuanto mayor es la correlación más estrecha es la banda en la que se sitúan los puntos de la nube.



La correlación se mide por el coeficiente de **correlación lineal** (o de Pearson).

Se tiene que $r \in [-1, 1]$:

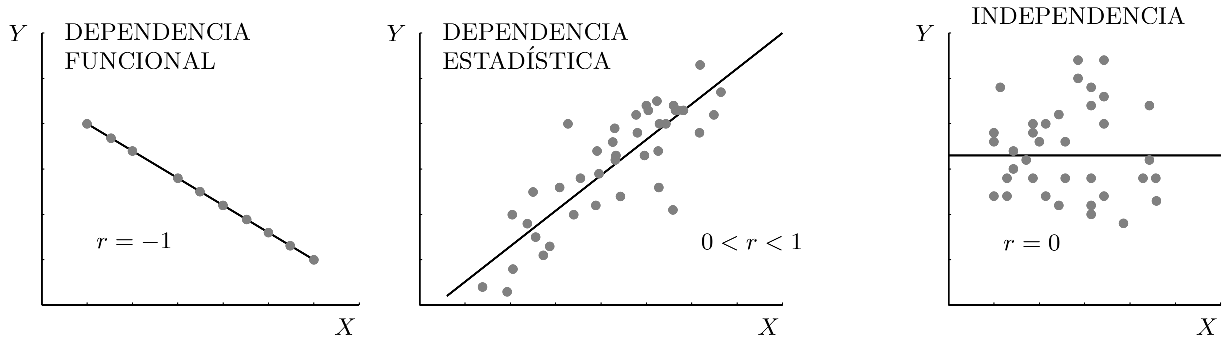
Cuanto más próximo a 1 está $|r|$ mayor es la correlación, más estrecha es la banda en que están los puntos alrededor de la recta de regresión.

Si $r = \pm 1$ entonces hay dependencia funcional, los puntos están en la recta.

Cuanto más próximo a 0 está r menor es la correlación, más redonda es la nube de puntos. Si es 0 hay independencia lineal.

Si $r > 0$ es correlación positiva la recta es creciente Si $r < 0$ es correlación negativa la recta es decreciente

ejemplo de correlación negativa: puesto de calificación en un campeonato de liga y número de goles marcados.



De todas formas para valorar la correlación hay que tener en cuenta el contexto: así por ejemplo una correlación $r = 0'6$ entre "estaturas" y "pesos" de los soldados de un regimiento es baja; una correlación $r = 0'6$ entre "la nota de matemáticas" y "el número total de horas de estudio a la semana" de los alumnos de una clase es notablemente alta.

11.4. Recta de regresión de y sobre x

Cuando la correlación es suficientemente alta, tiene sentido considerar la la recta de regresión de y sobre x "y/x" que pasa por el punto de coordenadas las medias $(\bar{x}, \bar{y})$:

recta de regresión y/x**:** $y - \bar{y} = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}.(x - \bar{x})$

la pendiente es el **coeficiente de regresión de** y **sobre** x y es igual a la covarianza dividida por la varianza de x:

Ejemplo En las notas de Física y Matemáticas de los 20 alumnos.

x_i	2	4	5	9	9	10	7	3	2	5	7	9	7	3	7	7	5	1	2	7
y_i	3	5	7	9	6	5	6	4	1	7	6	8	6	2	8	6	7	2	1	9

Las medias son: $\bar{x} = 5'55, \bar{y} = 5'40$, resulta: $\sigma_{xy} = 4'98$

El coeficiente de correlación lineal de la Física y las Matemáticas, cuyas desviaciones típicas son $\sigma_x = 2'67, \sigma_y = 2'43$, resulta: $r = \dfrac{4'98}{2'67 \cdot 2'43} = 0'76$

La varianza de la Física es: $\sigma_x^2 = 7'15$ resulta:

recta de regresión de y sobre x: $y - 5'4 = \dfrac{4'98}{7'15}(x - 5'55)$

El **valor esperado** de y_0 para un valor dado x_0, obtenido a partir de la recta de regresión y/x es más fiable cuanto mayor sea $|r|$ y más próximo a la media de x esté x_0. En el ejemplo, el valor esperado para una nota de Física de 5 es de: $y - 5'40 = 0'7(5 - 5'55)$; resulta $y = 5'03$, valor de alto grado de fiabilidad.

Problemas de Correlación

Sin calculadora estadística:

a) Hallar los parámetros de la variable estadística bidimensional: $(13, 12), (17, 17), (19, 15), (23, 24)$

x_i	y_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$y_i - \bar{y}$	$(y_i - \bar{y})^2$	$(x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})$
13	12	-5	25	-5	25	25
17	17	-1	1	0	0	0
19	15	1	1	-20	4	-2
23	24	5	25	7	49	35
$\Sigma x_i = 72$	$\Sigma y_i = 68$		$\Sigma(x_i - \bar{x})^2 = 52$		$\Sigma(y_i - \bar{y})^2 = 78$	$\Sigma(x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y}) = 58$

$\bar{x} = \frac{\Sigma x_i}{N} = \frac{72}{4} = 18 \quad \sigma_x^2 = \frac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}{N} = \frac{52}{4} = 13 \quad \sigma_x = \sqrt{13} = 3'61$

$\bar{y} = \frac{\Sigma y_i}{N} = \frac{68}{4} = 17 \ \sigma_y^2 = \frac{\Sigma(y_i - \bar{y})^2}{N} = \frac{78}{4} = 19'5 \ \sigma_y = \sqrt{19'5} = 4'42$

$\sigma_{xy} = \frac{\Sigma(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{N} = \frac{58}{4} = 14'5$

$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x . \sigma_y} = \frac{14'5}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{19'5}} = 0'91$

recta y/x: $y - \bar{y} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}.(x - \bar{x}); \quad y - 17 = \frac{14'5}{13}(x - 18)$

b) Hallar los parámetros de la variable estadística bidimensional: $(4, 12), (12, 16), (20, 20), (24, 28)$

x_i	y_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$y_i - \bar{y}$	$(y_i - \bar{y})^2$	$(x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})$
4	12	-11	121	-7	49	77
12	16	-3	9	-3	9	9
20	20	5	25	1	1	5
24	28	9	81	9	81	81
$\Sigma x_i = 60$	$\Sigma y_i = 76$		$\Sigma(x_i - \bar{x})^2 = 236$		$\Sigma(y_i - \bar{y})^2 = 140$	$\Sigma(x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y}) = 172$

$\bar{x} = \frac{\Sigma x_i}{N} = \frac{60}{4} = 15 \quad \sigma_x^2 = \frac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}{N} = \frac{236}{4} = 59 \quad \sigma_x = \sqrt{59} = 7'68$

$\bar{y} = \frac{\Sigma y_i}{N} = \frac{76}{4} = 19 \ \sigma_y^2 = \frac{\Sigma(y_i - \bar{y})^2}{N} = \frac{140}{4} = 35 \ \sigma_y = \sqrt{35} = 5'92$

$\sigma_{xy} = \frac{\Sigma(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{N} = \frac{172}{4} = 43$

$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x . \sigma_y} = \frac{43}{\sqrt{59} \cdot \sqrt{35}} = 0'94625$

recta y/x: $y - \bar{y} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}.(x - \bar{x}); \quad y - 19 = \frac{43}{59}(x - 15)$

1. Al aplicar dos tests de memoria a un grupo de alumnos, se han obtenido los siguientes resultados (de uno a diez):

   test I: 3,5,7,4,9,8,7,6,5,3,9,3

   test II: 4,6,8,5,7,7,8,7,6,4,8,5.

   a) Representar el diagrama de dispersión. b) Ajustar aproximadamente una recta a la nube. c) Si un alumno ha obtenido en el test I el resultado 6 qué resultado cabe esperar en el test II.

2. Hacer el problema anterior analíticamente.

   Solución: mediax = 5'75, varx = 4'69, mediay = 6'25, vary=2'02, covar = 2'73, recta $y/x : y - 6'25 = 0'58(x - 5'75)$, $y(6) = 6'3$ en el test II

3. El cambio de la moneda de dos naciones respecto al marco alemán ha sufrido las siguientes fluctuaciones:

   1'3; 2'5; 1'2; 1'1; 0'9;

   1'1; 2'3; 0'9; 1'0; 0'8.

   Indica la dependencia comercial y económica de esas dos naciones.

   Solución: mediax = 1'40, varx = 0'32, mediay = 1'22, vary = 0'30, covar = 0'31, r = 0'99, hay correlación muy grande, al ser positiva indica que crecen a la vez, las economías son complementarias de intensa relación comercial

4. Si en el problema anterior se obtuviera un coeficiente de correlación igual a -0'61 ¿como se interpretaría?

   Solución: Hay correlación negativa, no muy grande pero sí significativa. Al ser negativa indica que las economías están en competición: cuando una crece la otra decrece

5. Las estaturas y pesos, en centímetros y ki-

logramos respectivamente, de un grupo de 6 personas están dadas por:

Estatura (cm)	168	174	180	175	158	162
peso (kg)	65	70	73	68	55	62

i) Hallar la recta de regresión que sirve para predecir la altura conocido el peso y el coeficiente de correlación entre ambas medidas.

ii) Predecir la etatura de una séptima persona, afín a las anteriores, que pesa 71 kg. ¿Es fiable la predicción?.

Solución: mediax = 65'50, varx = 34'25, mediay = 169'50, vary = 58'58, covar = 43'32, r = 0'97, $y - 169'50 = 1'27(x - 65'50)$, $y(71) = 176'3$. Es fiable porque la correlación es alta y el valor 71 está cerca de la media

6. El puesto de clasificación y los goles marcados en una temporada de liga vienen dados por los pares: (1,75),(2,77),(3,72),(4,63),(5,69),(6,75), (7,62),(8,61),(9,63),(10,47),(11,49),(12,43) (13,51),(14,48),(15,44),(16,57),(17,47), (18,51), (19,47),(20,55),(21,37),(22,53) . Hallar la recta de regresión y el coeficiente de correlación interpretando el resultado. ¿Cuántos goles serían necesarios para quedar 8^0?

   Solución: coef correl -0,797968258 covar -57,40909091

   recta y/x $y = -1,426312818x + 73,03896104$ valor esperado f(8)= 61,6284585

7. Dos conjuntos de datos bidimensionales tienen como coeficientes de correlación r_1 = -0'87 y r_2 = 0'37. a) Razonar en cuál de los dos conjuntos es menor el ajuste (mediante una recta) de una variable en términos de la otra. b) Representar dos conjuntos de puntos cuyas correlaciones se correspondan aproximadamente con las dadas.

8. Hallar el coeficiente de correlación y si es adecuado, en la recta de regresión y/x, el valor esperado para x = 8, en una variable bidimensional de la que se conoce: $\Sigma x_i = 253, \Sigma y_i = 1171, \Sigma(x_i - \bar{x})^2 = 885'5, \Sigma(y_i - \bar{y})^2 = 2829'091, \Sigma(x_i - \bar{x})\cdot(y_i - \bar{y}) = -1263, N = 22$

   Solución: r = -0'798, $f(8) = 61'6$

9. Hallar el coeficiente de correlación y si es adecuado, en la recta de regresión y/x, el valor esperado para x = 10, de la variable bidimensional:

x_i	9	11	14	12
y_i	5	9	12	12

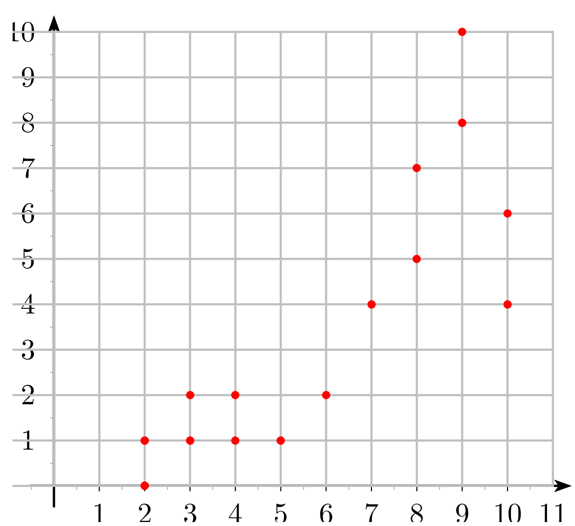
   Dibujar la nube de puntos y la recta de regresión.

   Solución: mediax = 11'5, mediay = 9'5, covar = 4'75, r = 0'9173, $f(10) = 7'3$

10. Hallar el coeficiente de correlación y si es adecuado, en la recta de regresión y/x, el valor esperado para x = 8, en la variable bidimensional de la que se conoce: $\Sigma x_i = 253, \Sigma y_i = 1171, \Sigma(x_i - \bar{x})^2 = 885,5, \Sigma(y_i - \bar{y})^2 = 2829,09, \Sigma(x_i - \bar{x})\cdot(y_i - \bar{y}) = -1263, N = 22$

    Solución: $r = -0,7979$, $f(8) = 61,62$

11. Hallar el coeficiente de correlación y si es adecuado, en la recta de regresión y/x, el valor esperado para x = 8, en la variable bidimensional de la que se conoce:

    Solución: . coef correl 0'85103036; covar 7,2544 ; recta y/x: $y = 0'8105x - 1,3843$ valor esperado $f(8) = 5,0997$

12. Hallar el coeficiente de correlación y si es adecuado, en la recta de regresión y/x, el valor esperado para x = 8, de la variable bidimensional:

x_i	10	8	7	7	6	7	5
y_i	10	7'5	8	10	8	7'5	5'25

Solución:

destpx= 1,456862718 destpy= 1,514386789

covar= 1,566326531

cocorr= 0,709948526

$y - 8,035714286 = 0,737980769(x - 7,142857143)$

$f(8) = 8,668269231$

13. Las tasas brutas de natalidad y mortalidad por cada mil habitantes, durante el año 1983, de algunos países de Europa eran las siguientes:

	T. nat.	T. mort.
R. D. Alemana	14	13
Checoslovaquia	15	12
Dinamarca	11	10
España	13	7
Francia	14	10
Grecia	14	9
Holanda	12	8
Irlanda	20	9
Italia	11	10
Noruega	12	10
Portugal	15	9
Reino Unido	13	12

Estudiar la variable bidimensional que resulta.

Solución: mediax = 13'67, varx = 5'39, mediay = 9'92, vary = 2'74, covar = -0'106, recta y/x : $y - 9'92 = -0'01(x - 13'67)$, $r = -0'01$

14. Las notas de Matemáticas y de Física de un grupo de alumnos están dadas por los pares (3,4) (7,6) (5,3) (5,4) (8,7) (7,5) (2,3) (2,2) (8,6). Hallar las rectas de regresión y el coeficiente de correlación entre ambas notas interpretando el resultado.

Solución: mediax = 5'22, varx = 5'28, mediay = 4'44, vary = 2'47, covar = 3'23, recta y/x : $y - 4'44 = 0'61(x - 5'22)$, r = 0'90

FÓRMULAS CIENCIAS SOCIALES I

Números factoriales y combinatorios

$m^{(h} = m(m-1)(m-2)(m-3)\dots(m-h+1)$

$\binom{m}{h} = \frac{m^{(h}}{h!}$

Potencias de exponente fraccionario

$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$

Ecuación de segundo grado

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$