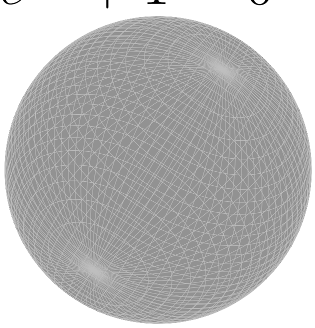
1^{o}BACHILLERATO

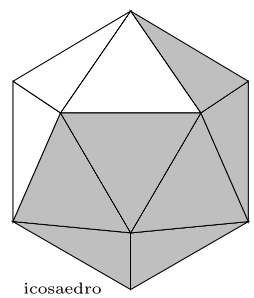
1^{o}BACHILLERATO

1^{o}BACHILLERATO

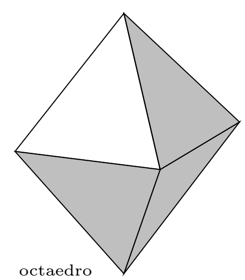
MATEMÁTICAS I

$$e^{\pi\, i} + 1 = 0$$

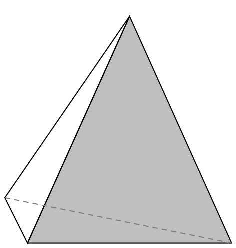




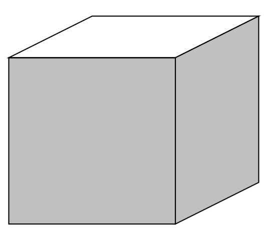
icosaedro



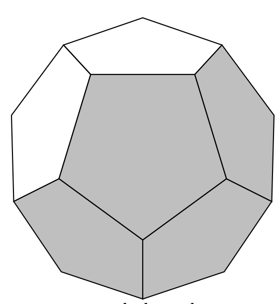
octaedro



tetraedro



cubo



dodecaedro

25 de agosto de 2020

Germán Ibáñez

http://www.otrapagina.com/matematicas

Índice general

Capítulo 1

EL NÚMERO REAL

1.1. Tipos de números

a. **Naturales:** $0, 1, 2, 3, 4, \ldots$

b. **Enteros:** $-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$

c. **Racionales:** Se pueden escribir de dos formas:

En forma **fraccionaria:** $-\frac{1}{4}, -\frac{328}{37}, \frac{3}{5}, \frac{29}{186}$

En forma **decimal:** $0'2, -0'827, -0'232323\ldots$

Los números racionales escritos en forma decimal se caracterizan porque llega un momento en que las cifras de después de la coma se repiten : $\frac{1}{4} = 0'25000\ldots, \frac{10}{3} = 3'333\ldots, \frac{39}{7} = 5'571428571\ldots$

$$\begin{array}{l|l} 39 & 7 \\ \hline \ \ 40 & 5'5714285\ldots \\ \ \ \ \ 50 & \\ \ \ \ \ \ \ 10 & \\ \ \ \ \ \ \ \ \ 30 & \\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 20 & \\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 60 & \\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 40 & \\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 5 & \end{array}$$

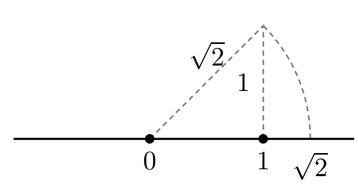
"una división acaba repitiéndose"

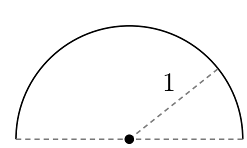
d. **Reales:** Son los racionales junto con los irracionales.

Los **irracionales** son aquellos cuya parte decimal no se repite:

$\sqrt{2} = 2'414213562\ldots, \pi = 3'141592654\ldots, \quad 1'01001000100001\ldots$

Vemos que $\sqrt{2}$ tiene expresión decimal no periódica por lo tanto no es racional sino irracional. En la figura:
hipotenusa $= \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$
Luego $\sqrt{2}$ se puede representar en la recta, por tanto en la recta hay más puntos que números racionales.





El número $\pi = 3'1415\ldots$ Es la longitud de media circunferencia de radio uno.

Un número irracional no se puede escribir exactamente en forma decimal, aunque se pueden hallar tantas cifras decimales como se desee.

Otro irracional famoso es el número $\mathbf{e} = 2'71828\ldots$

Es el número al que se acerca la expresión $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}$ cuando n es un número natural muy grande por ejemplo: $\left(1+\dfrac{1}{100}\right)^{100} = 2'7048,\qquad \left(1+\dfrac{1}{1000}\right)^{1000} = 2'7169$

1.2. Motivos para ampliar el conjunto de los números

El motivo por el que se va ampliando el conjunto de números es que hay operaciones que no se pueden hacer todas las veces:

- Se pasa de los naturales a los enteros para poder restar siempre
- Se pasa de los enteros a los racionales para poder dividir siempre
- Se pasa de los racionales a los reales para poder hacer raíces de números positivos siempre y poder expresar cualquier longitud con un número.

1.3. Los números reales

Los números racionales junto con los irracionales forman el conjunto de los números reales, se representan por R.

Propiedades de la suma y el producto de los números reales Lo que se dice para la suma vale para la resta y lo que se dice para el producto sirve para la división. Las operaciones suma (+) y producto (.) de números cumplen las siguientes propiedades:

Conmutativa: $\mathrm{a + b = b + a}$; $\mathrm{a \,.\, b = b \,.\, a}$
es decir: Para la suma, el orden de los sumandos no altera la suma.
Para la multiplicación, el orden de los factores no altera el producto.

Asociativa: $a + (b + c) = (a + b) + c$; $a.(b.c) = (a.b).c$
es decir: para sumar varios números da igual el orden en que se hacen las sumas . Lo mismo se diría para el producto.
Ejemplo: $\dfrac{6\sqrt{27}}{3} = 2\sqrt{27}$
En el caso del producto también se dice: para multiplicar un producto por un número se multiplica uno solo de los factores.

Elemento neutro: el 0 para la suma y el 1 para el producto

Elemento simétrico del número a es: el opuesto $-a$ para la suma y el inverso $\dfrac{1}{a}$ si $a \neq 0$ para el producto.

Ejemplos: de 3 el opuesto es -3 y el inverso $\dfrac{1}{3}$
de $\dfrac{5}{7}$ el inverso es $\dfrac{1}{\frac{5}{7}} = \dfrac{7}{5}$

Distributiva del producto respecto de la suma: $a.(b+c) = a.b + a.c$

es decir: para multiplicar una suma por un número se multiplica cada uno de los sumandos.
Ejemplos:

- $3(7+\sqrt{5}) = 21 + 3\sqrt{5}$
- Leyendo al revés es la operación de sacar factor común: $21 + 3\sqrt{5} = 3 \cdot 7 + 3\sqrt{5} = 3(7+\sqrt{5})$
- No confundir con la asociativa del producto: $\dfrac{3\sqrt{10}}{3} = \sqrt{10}$
- Simplificar indicando la propiedad que se aplica: $\dfrac{6+12\sqrt{10}}{3} = 2 + 4\sqrt{10}$

  He dividido numerador y denominador por 3.

  Como el numerador es una suma he aplicado la propiedad distributiva, dividiendo cada sumando.

  Para dividir $12\sqrt{10}$ por 3 he aplicado la propiedad asociativa del producto, dividiendo solo el 12.

$3 + 4\sqrt{5} = 7\sqrt{5}$ ESTÁ MUY MAL

El conjunto R de los números reales con la suma, el producto y las propiedades que verifican se dice que tiene estructura de cuerpo conmutativo, esto escribe $(R, +, .)$ cuerpo conmutativo.

Además dados dos números reales siempre podemos decir cuál de los dos es más pequeño, es decir los números reales están ordenados por el orden $\leq \ldots$ menor o igual que ...

1.4. Aproximación por exceso y por defecto de un número real

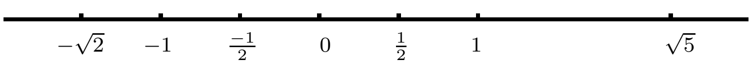
Los números que tienen expresión decimal periódica $5'3333\ldots, 17'28979797\ldots$ y los números irracionales, como no se pueden dar todas sus cifra decimales se dan por aproximación:

$$\sqrt{2} \approx \begin{cases} 1, 1'4, 1'41, 1'414, 1'4142, \ldots \text{ por defecto} \\ 2, 1'5, 1'42, 1'415, 1'4143, \ldots \text{ por exceso} \end{cases}$$

$$\frac{41}{33} = 1'2424\ldots \approx \begin{cases} 1, 1'2, 1'24, 1'242, 1'2424, \ldots \text{ por defecto} \\ 2, 1'3, 1'25, 1'243, 1'2425, \ldots \text{ por exceso} \end{cases}$$

1.5. Representación gráfica de los números reales en la recta

A cada número real le corresponde un punto y a cada punto un número real.
Los números reales llenan la recta:



1.6. Intervalos de números reales

Son trozos de la recta real. Por ejemplo: $\{x \in R/ -1'4 \leq x \leq 3\}$, es el conjunto de números reales x, tales que $-1'4$ es menor o igual que x y x es menor o igual que 3, es decir el conjunto de números reales comprendidos entre $-1'4$ y 3, incluyendo $-1'4$ y 3.

intervalo abierto de extremos a, b es: $(a, b) = \{x \in R/a < x < b\}$

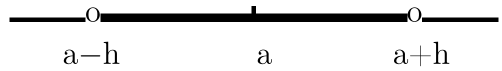
intervalo cerrado de extremos a, b es: $[a, b] = \{x \in R/a \leq x \leq b\}$

intervalo cerrado por a y abierto por b es $[a, b)$ es: $[a, b) = \{x \in R/a \leq x < b\}$

números más pequeños o iguales que a es: $(-\infty, a]$

números mayores que a es: (a, ∞)

Entorno simétrico de a de radio h es el intervalo abierto $(a-h, a+h)$, cualquier x del entorno se caracteriza porque la distancia de x a a es menor que h, es decir:
$(a-h, a+h) = \{x \in R/a-h < x < a+h\} = \{x \in R/|x-a| < h\}$



Ejemplo Expresar el conjunto de puntos de R que distan de -0'1 menos de 2.

1.7. Unidad imaginaria. Números complejos

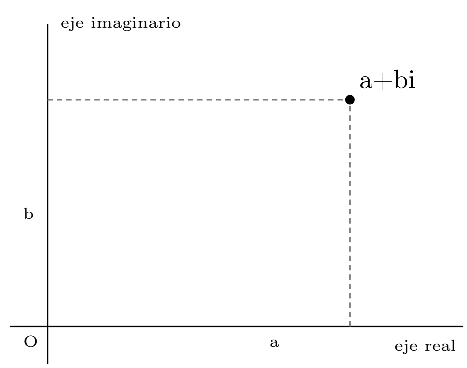
Sabemos que los números reales negativos no tienen raíz cuadrada real; para que todos los números tengan raíz, inventamos los números imaginarios.

La unidad imaginaria es: $i = \sqrt{-1}$, y entonces ya podemos escribir cualquier raíz.

Ejemplos $\sqrt{-7} = \sqrt{7.(-1)} = \sqrt{7}.\sqrt{-1} = \sqrt{7}.i$
$\sqrt{-9} = 3i$
$\sqrt{-\pi} = \sqrt{\pi}.i$
Resolver la ecuación $x^2 - 4x + 8 = 0$
$x = \dfrac{4 \pm \sqrt{16-32}}{2} = \dfrac{4 \pm \sqrt{-16}}{2} = \dfrac{4 \pm 4i}{2} = 2 \pm 2i; \begin{cases} x_1 = 2+2i \\ x_2 = 2-2i \end{cases}$
Estos son ejemplos de números complejos. Otros ejemplos serían $3+5i$; $-2+\sqrt{7}i$; etc.

En general un número complejo es de la forma "a+bi" donde a y b son números reales.

Los números reales se pueden considerar incluidos en los números complejos, por ejemplo:
$4 = 4 + 0i$
Los números complejos de la forma $5i = 0 + 5i$, se llaman imaginarios puros.
En un número complejo a+bi, a se llama parte real, b se llama parte imaginaria (lo que acompaña a la i).
Los números complejos se representan en dos ejes en el plano:
Ejemplos: z = 4+3i ;
z'= $-2i$.



El punto A que lo representa se llama afijo del número complejo z .

Suma de números complejos
Se suman las partes reales y las imaginarias.

Ejemplo: $(3-2i) + (1+3i) = 4 + i$

Potencias de la unidad imaginaria
Sabemos que $i = \sqrt{-1}$, por lo tanto $i^2 = -1$ y entonces:
$i^3 = i.i^2 = (-1)i = -i$

$i^4 = i^2.i^2 = (-1)(-1) = 1$
$i^5 = i.i^4 = i \cdot 1 = i$
$i^{13} = i^{4 \cdot 3+1} = i^{4 \cdot 3}.i = i$
$i^m = i^{4.n+r} = i^{4.n}.i^r = i^r$ o sea $i^m = i^r$ siendo r el resto de dividir m por 4

Producto de números complejos
Ejemplo:
$(3-2i).(1+3i) = 3+9i-2i-6i^2 = 3+7i-6.(-1) = 3+7i+6 = 9+7i$
Por tanto la multiplicación es parecida a la de polinomios.

Por la representación gráfica de los números complejos vemos que no están ordenados, no se sabe cuando uno es menor que otro, eso hace que en la práctica se utilicen poco

1.8. Números factoriales

$5 \cdot 4 \cdot 3 =$ factorial de 5 de orden 3.
$1998 \cdot 1997 \cdot 1996 \cdot 1995 \cdot 1994 \cdot 1993 \cdot 1992 \cdot 1991 \cdot 1990 \cdot 1989 \cdot 1988 = 1998^{(11}$ es el factorial de 1998 de orden 11.
$x(x-1)(x-2) = x^{(3}$. Factorial de x de orden 3.
Dado un número natural por ejemplo el 5, podemos considerar los productos $5 \cdot 4$; $5 \cdot 4 \cdot 3$; etc.

Es decir productos en los que los factores se van obteniendo restando una unidad a los anteriores.

El número de factores se llama orden. Así en $4 \cdot 3$ es factorial de 4 de orden 2, se escribe $4^{(2}$.
Cuando llega hasta el 1 se escribe sólo con una admiración, ejemplo: $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4!$ y se llama simplemente número factorial, en el ejemplo factorial de 4.

En general sean m y h dos números naturales con $m \geq h$, factorial de m de orden h es el producto de h factores decrecientes a partir de m : ej: $7^{(3} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$

$$m^{(h} = m(m-1)(m-2)(m-3)\dots(m-h+1)$$

Efectivamente hay h factores pues contando lo que se resta:

	m	$(m-1)$	$(m-2)$	$(m-3)$	$\dots$	$(m-h+1)$	
se resta:	0	1	2	3		$(h-1)$	pues $[m-(h-1)] = (m-h+1)$
orden:	1^0	2^0	3^0	4^0		h^0	

Ejemplo: $x^{(5} = x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$

Por convenio se define que factorial de cualquier número de orden 0 es 1 $m^{(0} = 1$;
y de orden 1 : $m^{(1} = m$.

Factorial de m será $m! = m(m-1)(m-2)(m-3)\dots 3 \cdot 2 \cdot 1$
ej: $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

Propiedades

1. $m^{(m} = m(m-1)(m-2)(m-3)\ldots(m-m+1) = m(m-1)(m-2)(m-3)\ldots 2\cdot 1 = m!$

2. $m^{(h} = \dfrac{m!}{(m-h)!}$

   demostración:
   $\dfrac{m!}{(m-h)!} = \dfrac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-h+1)(m-h)(m-h-1)\ldots 3\cdot 2\cdot 1}{(m-h)(m-h-1)\ldots 3\cdot 2\cdot 1} =$
   $m(m-1)(m-2)\ldots(m-h+1)$

1.9. Números combinatorios

Sean m y h dos números naturales con $m \geq h$. Se define número combinatorio de base m de orden h como:

$$\binom{m}{h} = \frac{m^{(h}}{h!}$$

Ejemplos:

$\binom{7}{3} = \dfrac{7^{(3}}{3!} = \dfrac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2\cdot 1} = 35$

$\binom{x}{4} = \dfrac{x^{(4}}{4!} = \dfrac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}$

$\binom{x+3}{2} = \dfrac{(x+3)^{(2}}{2!} = \dfrac{(x+3)(x+2)}{2\cdot 1}$

$\binom{x+3}{x+2} = \dfrac{(x+3)^{(x+2}}{(x+2)!} = \dfrac{(x+3)(x+2)\ldots[(x+3)-(x+2)+1]}{(x+2)(x+1)x(x-1)(x-2)\ldots 3\cdot 2\cdot 1} =$

$\dfrac{(x+3)(x+2)\ldots 2}{(x+2)(x+1)x(x-1)(x-2)\ldots 3\cdot 2\cdot 1} = x+3$

Propiedades:

1. $\binom{m}{h} = \dfrac{m!}{h!.(m-h)!}$

   Ejemplo: $\binom{7}{3} = \dfrac{7^{(3}}{3!} = \dfrac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2\cdot 1} \quad \dfrac{7!}{4!\cdot 3!} = \dfrac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot\ 3\cdot 2\cdot 1} = \dfrac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2\cdot 1}$

   Demostración: $\binom{m}{h} = \dfrac{m^{(h}}{h!} = \dfrac{\frac{m!}{(m-h)!}}{h!}$

2. $\binom{m}{0} = 1 \quad \binom{m}{m} = 1$

   Demostración: $\binom{m}{0} = \dfrac{m^{(0}}{0!} = \dfrac{1}{1} = 1; \quad \binom{m}{m} = \dfrac{m!}{(m-m)!.m!} = \dfrac{m!}{0!.m!} = 1$

3. Triángulo de Tartaglia

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & \binom{0}{0} & & & & & & \\
 & & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & & \\
 & & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & & \\
 & & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & & \\
 & & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & & \\
 & \binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} & \\
\binom{6}{0} & & \binom{6}{1} & & \binom{6}{2} & & \binom{6}{3} & & \binom{6}{4} & & \binom{6}{5} & & \binom{6}{6}
\end{array}
$$

que da los resultados:

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}
$$

Observamos que:

a) la suma de dos números combinatorios seguidos nos da el de abajo:
$$\binom{m}{h} + \binom{m}{h+1} = \binom{m+1}{h+1}$$

b) los números equidistantes de los extremos son iguales:
$$\binom{m}{h} = \binom{m}{m-h}$$

c) la suma de los elementos de la linea de base m es 2^m

1.10. Problemas

1. Efectuar por mínimo común denominador simplificando el resultado:

   a) $\frac{4}{3}-\frac{2}{25}+\frac{7}{5}=$

   b) $1+\frac{1}{10}-\frac{10}{100}+\frac{1}{10000}=$

   c) $\frac{5}{4}-\frac{3}{10}+\frac{9}{6}-\frac{10}{25}+4=$

   d) $1-\dfrac{\frac{1}{5}+\frac{3}{4}}{\frac{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}}{5}-2}=$

   Solución: a) 199/75, b) 10001/10000, c) 121/20, d) 54/35

2. Extraer factor común

   a) $8a+5ab-3ac-2da$

   b) $3a+9ab-6ad+12ca$

   c) $14\sqrt{2}-21\sqrt{3}+28\sqrt{5}+49\sqrt{7}$

   d) $x^3y^3+2x^2y^4-5x^3y^2$

   e) $15x^2-3x+6x^3-12x^7$

   Solución: a) $a(8+5b-3c-2d)$, b) $3a(1+3b-2d+4c)$, c) $7(2\sqrt{2}-3\sqrt{3}+4\sqrt{5}+7\sqrt{7})$, d) $x^2y^2(xy+2y^2-5x)$, e) $3x(5x-1+2x^2-4x^6)$

3. Efectuar $1+\dfrac{1}{3+\frac{1}{2+\frac{1}{3}}}=$

   Solución: 31/24

4. Efectuar $\dfrac{\left(\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\right)\frac{2}{3}}{\frac{3}{4}\left(1+\frac{2}{5}\right)}=$

   Solución: 44/63

5. Sacar factor común $x(x-y)-(x-y)^2$

   Solución: $(x-y)y$

6. Representar en una recta

   $-8/3;\quad -4'7;\quad -0'9;\quad \sqrt{2};\quad 2\sqrt{3}$

7. Representar y dar tres elementos del conjunto $\{x\in R/-1'4\leq x\leq 3\}$

8. Hallar dos clases contiguas de números racionales que aproximan:

   a) $\sqrt{19}$

   b) $3-2\sqrt{2}$;

   c) $-\sqrt{3}$.

   d) Representar esos números gráficamente hasta las décimas.

   Solución: b) $\left.\begin{array}{l}0,0'1,0'17,0'171,0'1715\\1,0'2,0'18,0'172,0'1716\end{array}\right\}3-2\sqrt{2}=0'171572$

   c) $\left.\begin{array}{l}-1,-1'7,-1'73,-1'732\\-2,-1'8,-1'74,,-1'733\end{array}\right\}-\sqrt{3}=-1'73205$

9. Escribir y dibujar los intervalos $(3,6)$; $[-1'3,\sqrt{2}]$. Decir de qué número es entorno el intervalo $[3,7]$.

10. Decir qué propiedad se aplica en cada caso:

    a) $(-5),9=9.(-5)$

    b) $3(2-6x)=6-18x$

    c) $[3.(-5)].[14.(-4)]=3.(-70).(-4)$

    d) $\frac{10+x}{4}=\frac{5+x}{2}$

    e) $\frac{4+6}{4}=\frac{2+3}{2}$

11. Dibujar 5 números en el entorno de centro $-1'9$ y radio $0'2$.

12. Dibujar 5 números en el entorno de centro $0'1$ y radio $0'25$.

13. Efectuar $(3+2i).(5-4i)$

    Solución: $23-2i$

14. Dados los números complejos $z=3-i$, $u=2+i$, $v=3i$. Efectuar $z^2+u.v$

    Solución: 5

15. Efectuar $(2-3i)(5i-1)$

    Solución: $13+13i$

16. Representar los afijos a) $\sqrt{3}+3i$ b) -3 c) $6i$ d) $-4-5i$

17. Establecer la ecuación de 2^0 cuyas soluciones son $1-3i$, $1+3i$

    Solución: $x^2-2x+10=0$

18. Establecer la ecuación de 2^0 cuyas soluciones son $2+4i$, $1-2i$

    Solución: $x^2-(3+2i)x+10=0$

19. Efectuar

    a) $5^{(4}=$

    b) $20^{(3}=$

    c) $x^{(5}=$

    d) $28^{(x}=$

    Solución: a) 120, b) 6840, c) $x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$, d) $28\cdot 27\cdot 26\ldots(28-x+1)$

20. Efectuar
    $$\frac{(2x-1)!+(2x-3)!}{(2x)!}$$

    Solución: $\dfrac{(2x-1)(2x-2)+1}{2x(2x-1)(2x-2)}$

21. Efectuar

    a) $\binom{7}{3}=$

    b) $\binom{30}{6}=$

    c) $\binom{x-1}{3}=$

    d) $\binom{2x-1}{h-2}=$

    Solución: a) 35, b) 593775, c) $\dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)}{6}$, d) $\dfrac{(2x-1)(2x-2)(2x-3)\ldots(2x-h+2)}{(h-2)(h-3)\ldots 3\cdot 2\cdot 1}$

22. Simplificar $\binom{x+1}{5}:\binom{x-1}{4}=$

    Solución: $\dfrac{x^2+x}{5x-20}$

23. Resolver $\binom{x+1}{2}+\binom{x}{2}+\binom{x-1}{2}=136$

    Solución: $-9, 10$

24. Resolver $\binom{x}{3}=\binom{x}{2}$

    Solución: 5

25. Resolver $\binom{3}{1}+\binom{x}{2}=\binom{x+1}{2}$

    Solución: 3

Capítulo 2

POTENCIAS Y RADICALES

2.1. Potencias de números reales

Dado un número real a y un entero positivo n se define potencia de base a y exponente n como el producto de a por sí mismo n veces.

$$a^n = a \cdots^{(n)} \cdots a$$
$$a^1 = a$$
$$a^0 = 1$$

Se define potencia de base a y exponente negativo $-n$, como 1 partido por la misma potencia positiva, es decir: $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

2.2. Propiedades de las potencias

1. $(a.b)^x = a^x.b^x$

   Para elevar un producto a una potencia se elevan cada uno de los factores.

2. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$

   Para elevar un cociente a una potencia, se eleva el numerador y el denominador.

3. $(a^x)^y = a^{x.y}$ Para elevar una potencia a otra potencia se multiplican los exponentes.

4. $a^x.a^y = a^{x+y}$ Para multiplicar dos potencias de igual base se suman los exponentes.

5. $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ Para dividir dos potencias de la misma base se restan los exponentes.

Observaciones: 1) con sumas o restas de potencias la unica operacion posible es sacar factor común. Por ese motivo: $3^2 + 5^2 = (3+5)^2 = 8^2$ ESTA MUY MAL.

2) al elevar una fracción a una potencia negativa resulta: $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-x} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^x$

2.3. Igualdades notables

1. $(-a)^2 = a^2$. Ejemplo: $(-x+3)^2 = (x-3)^2$

2. $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$. El cuadrado de una suma es igual al cuadrado del primero, más el cuadrado del segundo, más el doble del primero por el segundo.

   Ejemplo: $[(x+y)+2z]^2 = (x+y)^2 + (2z)^2 + 4z(x+y)$

3. $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$. El cuadrado de una resta es igual al cuadrado del primero, más el cuadrado del segundo, menos el doble del primero por el segundo.

   Ejemplo: $(2x-y^2)^2 = 4x^2 + y^4 - 4xy^2$

4. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$. Suma por diferencia es igual a la diferencia de los cuadrados.

   Ejemplo: $(x^4-1) = (x^2+1)(x^2-1)$

2.4. Notación científica

En las calculadoras aparecen expresiones del tipo: $8'37341 \cdot -24$ que significan $8'37341 \cdot 10^{-24}$;

Se llama notación científica de un número si éste se expresa por una cifra luego la coma decimal y decimales, multiplicado por una potencia entera de 10;
esquemáticamente: $A'BCD\ldots \cdot 10^N; \quad N \in Z$
$3'247 \cdot 10^{-4} = 3'247 \cdot \dfrac{1}{10^4} = 3'247 \cdot \dfrac{1}{10000} = 0'0003247$
Ejemplo: Efectuar y dar el resultado en notación científica.

$$\frac{3'2 \cdot 10^{-7} + 5'4 \cdot 10^{-8}}{2 \cdot 10^{17}} = \frac{3'2 \cdot 10 \cdot 10^{-1} \cdot 10^{-7} + 5'4 \cdot 10^{-8}}{2 \cdot 10^{17}} = \frac{32 \cdot 10^{-8} + 5'4 \cdot 10^{-8}}{2 \cdot 10^{17}} = \frac{(32+5'4)10^{-8}}{2 \cdot 10^{17}} =$$
$$\frac{37'4 \cdot 10^{-8}}{2 \cdot 10^{17}} = 18'7 \cdot 10^{-25} = \frac{18'7}{10} \cdot 10 \cdot 10^{-25} = 1'87 \cdot 10^{-24}$$

Se caracteriza porque después de la primera cifra hay coma.

2.5. Radicales

Son del tipo $\sqrt{3}$, $\sqrt[5]{17}$, $\sqrt[3]{64}$.

Dado un número real a y un número natural n distinto de 0 , se dice que el número b es raíz de índice n del número a cuando la potencia de b de exponente n es a. Es decir:

$$\sqrt[n]{a} = b \text{ cuando } b^n = a$$

Observaciones: 1) Se dan los siguientes nombres en $\sqrt[n]{a} = b$
a = radicando, b =raíz, n = índice ($n = 2$ no se pone), $\sqrt[n]{a}$ = radical

2)

$$\text{RADICANDO POSITIVO} \begin{cases} \text{índice par} & \longrightarrow & \text{2 raíces; ejemplo: } \sqrt{4} = \pm 2 \\ \text{índice impar} & \longrightarrow & \text{1 raíz; ejemplo: } \sqrt[3]{125} = 5 \end{cases}$$

$$\text{RADICANDO NEGATIVO} \begin{cases} \text{índice par} & \longrightarrow & \text{ninguna raíz real; ejemplo: } \sqrt{-4} \\ \text{índice impar} & \longrightarrow & \text{1 raíz; ejemplo: } \sqrt[3]{-8} = -2 \end{cases}$$

2.6. Propiedades de los radicales

Se deducen de las propiedades de las potencias:

1. Raíz de un producto es el producto de las raíces $\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$
2. Raíz de un cociente es igual al cociente de las raíces $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
3. Raíz de una raíz es la raíz de índice el producto de los índices. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n.m]{a}$
4. Raíz de una potencia es igual a la potencia de la raíz $\sqrt[n]{a^p} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^p$, (salvo signo)
5. Una raíz no varía si se multiplica o se divide el índice y el exponente por un mismo número es decir: $\sqrt[n]{a^p} = \sqrt[n.h]{a^{p.h}}$

Observación: con raíces de sumas o sumas de raíces no hay nada que hacer.
Ejemplo: $\sqrt{a^2+4} = a + 2$ MUY MAL

2.7. Cálculo con radicales

Simplificar radicales: se dividen exponentes e índices por un mismo número, ejemplo:

$$\sqrt[4]{9a^4b^8} = \sqrt[4]{3^2a^4b^8} = \sqrt{3a^2b^4}$$

Extraer factores fuera de la raíz: se divide el exponente por el índice y dentro queda el factor elevado al resto. Saliendo fuera del radical el factor elevado al cociente. Ejemplos:

- $\sqrt[3]{128} = \sqrt[3]{2^7} = 2^2\sqrt[3]{2}$
- $\sqrt[4]{32a^5b^4c^{14}d^3} = \{32 = 2^5\} = 2abc^3\sqrt[4]{2ac^2d^3}$

Introducir factores dentro del radical: se multiplica el exponente por el índice. Ejemplos:

- $\dfrac{3b^2}{a^5}\sqrt[5]{\dfrac{b}{c+a^3}} = \sqrt[5]{\dfrac{3^5b^{10}b}{a^{25}(c+a^3)}} = \sqrt[5]{\dfrac{3^5b^{11}}{a^{25}(c+a^3)}}$

- $\dfrac{3x^2}{2x+1}\sqrt{\dfrac{2x+1}{12x^5}}=\sqrt{\dfrac{3^2x^4(2x+1)}{(2x+1)^2 12x^5}}=\sqrt{\dfrac{3}{4(2x+1)x}}$

Reducir a una raíz: Se reducen primero a común índice que es el mínimo común múltiplo de los índices. Ejemplos:

- $\dfrac{\sqrt[3]{a^2b}}{\sqrt{3a^2}\sqrt[4]{b^3}}=\dfrac{\sqrt[12]{(a^2b)^4}}{\sqrt[12]{(3a^2)^6}\sqrt[12]{(b^3)^3}}=\dfrac{\sqrt[12]{a^8b^4}}{\sqrt[12]{3^6a^{12}}\sqrt[12]{b^9}}=\sqrt[12]{\dfrac{a^8b^4}{3^6a^{12}b^9}}=\sqrt[12]{\dfrac{1}{3^6a^4b^5}}$
- $\dfrac{\sqrt[3]{2x^4y^2}}{\sqrt[6]{5(x-1)^2}\sqrt{9x^3y^{12}}}=\dfrac{\sqrt[6]{2^2x^8y^4}}{\sqrt[6]{5(x-1)^2}\sqrt[6]{9^3x^9y^{36}}}=\sqrt[6]{\dfrac{2^2x^8y^4}{5(x-1)^2 9^3x^9y^{36}}}=\sqrt[6]{\dfrac{2^2}{5(x-1)^2 9^3xy^{32}}}$

Operaciones con radicales semejantes: Se extraen factores y se saca factor común.Ejemplo:
$\sqrt{27}-\sqrt{75}-\sqrt{300}=\sqrt{3^3}-\sqrt{5^2 3}-\sqrt{10^2 3}=3\sqrt{3}-5\sqrt{3}-10\sqrt{3}=-12\sqrt{3}$

Racionalizar Racionalizar es quitar raíces del denominador:

1. Denominador sin sumas de raíces. Para racionalizar en este caso se multiplica el numerador y el denominador por el radical adecuado. Ejemplos:
   - $\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
   - $\dfrac{a}{3\sqrt{5}}=\dfrac{a\sqrt{5}}{3\sqrt{5}\sqrt{5}}=\dfrac{a\sqrt{5}}{3\cdot 5}=\dfrac{a\sqrt{5}}{15}$
   - $\dfrac{2}{\sqrt[7]{5^3}}=\dfrac{2\sqrt[7]{5^4}}{\sqrt[7]{5^3}\sqrt[7]{5^4}}=\dfrac{2\sqrt[7]{5^4}}{\sqrt[7]{5^3 5^4}}=\dfrac{2\sqrt[7]{5^4}}{\sqrt[7]{5^7}}=\dfrac{2\sqrt[7]{5^4}}{5}$
   - $\dfrac{7}{\sqrt[3]{25}}=\dfrac{7}{\sqrt[3]{5^2}}=\dfrac{7\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5^2}\sqrt[3]{5}}=\dfrac{7\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5^3}}=\dfrac{7\sqrt[3]{5}}{5}$
   - $\dfrac{1-x}{\sqrt[5]{x^{12}}}=\dfrac{1-x}{x^2\sqrt[5]{x^2}}=\dfrac{(1-x)\sqrt[5]{x^3}}{x^2\sqrt[5]{x^2x^3}}=\dfrac{(1-x)\sqrt[5]{x^3}}{x^2x}=\dfrac{(1-x)\sqrt[5]{x^3}}{x^3}$
2. Denominador con sumas o restas de raíces: Se multiplica numerador y denominador por el conjugado, (solo sirve para raíces cuadradas). Ejemplos:
   - $\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{5}}=\dfrac{3\sqrt{2}(\sqrt{2}+\sqrt{5})}{(\sqrt{2}-\sqrt{5})(\sqrt{2}+\sqrt{5})}=\dfrac{3\sqrt{2}(\sqrt{2}+\sqrt{5})}{(\sqrt{2})^2-(\sqrt{5})^2}=\dfrac{6+3\sqrt{10}}{2-5}=\dfrac{6+3\sqrt{10}}{-3}=$
     $-2-\sqrt{10}$
   - $\dfrac{3\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}=\dfrac{3\sqrt{3}(x-\sqrt{3})}{(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})}=\dfrac{3x\sqrt{3}-9}{x^2-3}$

2.8. Potencias de exponente fraccionario

Definimos potencias de base a y exponente $\dfrac{p}{q}$ como la raíz de índice el denominador, de la potencia de exponente el numerador:

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$$

Si el exponente es negativo: $a^{-\frac{p}{q}} = \dfrac{1}{a^{\frac{p}{q}}}$
Las propiedades son las mismas de otras potencias.

Ejemplo:
Simplificar: $\dfrac{8^{\frac{2}{3}}6^{\frac{3}{5}}}{2^{\frac{-5}{3}}12^{\frac{4}{8}}} = \dfrac{(2^3)^{\frac{2}{3}}(3\cdot 2)^{\frac{3}{5}}}{2^{\frac{-5}{3}}(2^2\cdot 3)^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{2^2 3^{\frac{3}{5}}2^{\frac{3}{5}}}{2^{\frac{-5}{3}}2\cdot 3^{\frac{1}{2}}} = 2^{2+\frac{3}{5}+\frac{5}{3}-1}\cdot 3^{\frac{3}{5}-\frac{1}{2}} = 2^{\frac{49}{15}}\cdot 3^{\frac{1}{10}}$

2.9. Problemas

1. Calcular las potencias:

   $(-3)^2; \quad -3^2; \quad (-0'15)^2; \quad 0'01^4; \quad (-2/3)^3$

   Solución: $9, -9, 0'0225, 0'00000001, -8/27$

2. Reducir a una sola potencia

   a) $(-1/2)^2 \cdot (1/2)^5 \cdot (1/2)^3 \cdot (1/2) =$

   b) $\{[(-0'1)^2]^3\}^3 =$

   c) $[(-1/2)^2]^5 =$

   Solución: a) $(1/2)^{11}$, b) $(0'1)^{18}$, c) $(1/2)^{10}$

3. Efectuar $(-1/2)^2 + (3/2)^3 - (5/3)^2 =$

   Solución: $61/72$

4. Efectuar:

   $\{[(-3/5)^3 \cdot (-3/5)^2] : (-3/5)^6\} + (4/3)^3(3/2)^4 =$

   Solución: $31/3$

5. Calcular

   a) $(-1/2)^{-1} =$

   b) $[(16/5) - 1'2]^{-3} =$

   c) $\left(\dfrac{1}{5} - 2\right)^{-2} =$

   Solución: a) -2, b) $1/8$, c) $25/81$

6. Simplificar

   a) $\dfrac{3024}{4200}$; b) $\dfrac{441}{1350}$; c) $\dfrac{1331}{165}$

   Solución: a) $18/25$, b) $49/150$, c) $121/15$

7. Simplificar

   a) $\dfrac{a^2-9}{2a-6}$; b) $\dfrac{14a^2+3a^2}{7a}$

   c) $\dfrac{a^2-ab2+b^2}{a^2-b^2}$

   Solución: a) $(a+3)/2$, b) $17a/7$, c) $(a-b)/(a+b)$

8. Simplificar

   a) $\dfrac{(p^2-4)^{-1}}{(p^2-2p)^{-1}}$; b) $(z^4-1)(z^2-2z+1)^{-1}$

   Solución: a) $p/(p+2)$, b)$[(z+1)(z^2+1)]/(z-1)$

9. Efectuar y poner el resultado en forma de notación científica:

   a) $1'2 \cdot 10^{15} \cdot 2 \cdot 10^{-8}$

   b) $\dfrac{4'2 \cdot 10^{13} + 2 \cdot 10^{19}}{2 \cdot 10^{-8}}$

   c) $\dfrac{3'2 \cdot 10^7 - 4 \cdot 10^8}{2 \cdot 10^{-8} + 10^5}$

   Solución: a) $2'4 \cdot 10^7$, b) $1'0000021 \cdot 10^{27}$, c) $-3'6 \cdot 10^3$

10. Calcular las siguientes raíces por el método más rápido

    a) $\sqrt[3]{8 \cdot 27 \cdot 64}$; b) $\sqrt[3]{0'064^2}$; c) $\sqrt{\dfrac{25}{0'0001}}$

    Solución: a) 24, b) $0'16$, c) 500

11. Efectuar: $\sqrt{1+\sqrt{6+\sqrt{5+\sqrt{16}}}}$

    Solución: 2

12. Efectuar

    $\sqrt{3a^2+\sqrt{6a^4+\sqrt{25a^8}}}$

    Solución: $a\sqrt{3+\sqrt{11}}$

13. Extraer factores del radical

    a) $\sqrt[3]{54}$; b) $\sqrt[5]{\dfrac{27x^{10}}{y^8}}$

    c) $\dfrac{x.y}{2}\sqrt{\dfrac{n^6}{8x^4y^3z}}$

    Solución: a) $3\sqrt[3]{2}$, b) $\dfrac{x^2}{y}\sqrt[5]{\dfrac{3^3}{y^3}}$, c) $\dfrac{n^3}{4x}\sqrt{\dfrac{1}{2yz}}$

14. Introducir factores dentro del radical

    a) $x\sqrt{\dfrac{1}{x}}$

    b) $\dfrac{2}{3}\sqrt[3]{\dfrac{81}{4}}$

    c) $\dfrac{a-b}{a+b}\sqrt{\dfrac{a^2+b}{a-b}}$

    Solución: a) $\sqrt{x}$, b) $\sqrt[3]{6}$, c) $\sqrt{\dfrac{(a-b)(a^2+b)}{(a+b)^2}}$

15. Efectuar $2a\sqrt{3}-\sqrt{27a^2}+2\sqrt{12}$

    Solución: $(4-a)\sqrt{3}$

16. Efectuar $4\sqrt{12}-\dfrac{3}{2}\sqrt{48}+\dfrac{2}{3}\sqrt{27}+\dfrac{3}{5}\sqrt{75}$

    Solución: $7\sqrt{3}$

17. Efectuar $3\sqrt[3]{\dfrac{2x}{9}}-2\sqrt[3]{\dfrac{3x}{4}}+\sqrt[3]{\dfrac{6x}{5}}$

    Solución: $\sqrt[3]{\dfrac{6x}{5}}$

18. Racionalizar $\dfrac{1}{2-2\sqrt{2}}$

    Solución: $\dfrac{-1-\sqrt{2}}{2}$

19. Racionalizar $\dfrac{6(3-y)}{\sqrt[3]{(3-y)^2}}$

    Solución: $6\sqrt[3]{3-y}$

20. Racionalizar $\dfrac{3\sqrt{5}-2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+3\sqrt{5}}$

    Solución: $(19-4\sqrt{15})/11$

21. Efectuar racionalizando:
$$\frac{1}{4\sqrt{2}}+\frac{2}{3\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+2}=$$
    Solución: $\frac{11\sqrt{2}+48\sqrt{3}-72}{24}$

22. Simplificar
$$\frac{2\sqrt{2x^4-x^3}+\sqrt{2x^2-7x^4}}{x^2-x}=$$
    Solución: $\dfrac{2\sqrt{2x^2-x}+\sqrt{2-7x^2}}{x-1}=$

23. Extraer factores fuera de la raíz:
$$\sqrt{\frac{4+4x+x^2}{2^6x^3y^4}}=$$
    Solución: $\dfrac{x+2}{8y^2x}\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

24. Efectuar racionalizando
$$\frac{1}{2+3\sqrt{3}}-\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt[3]{3}}$$
    Solución: $\dfrac{-2+3\sqrt{3}-46\sqrt[6]{3}}{23}$

25. Introducir factores $\dfrac{(2+x)^2}{8xy^2}\sqrt{\dfrac{1}{x}}$

    Solución: $\sqrt{\dfrac{(2+x)^4}{8^2x^3y^4}}$

26. Simplificar $\dfrac{\sqrt{3x^3-8x^2}-\sqrt{x^2+3x^6}}{x-\sqrt{x^2-x^3}}=$

    Solución: $\dfrac{\sqrt{3x-8}-\sqrt{1+3x^4}}{1-\sqrt{1-x}}$

27. Efectuar y dar el resultado en forma de notación científica $\dfrac{3'2\cdot 10^{10}-4'2\cdot 10^{8}}{5\cdot 10^{-2}}$

    Solución: $6'31\cdot 10^{11}$

28. Simplificar
$$\frac{(9-6a+a^2)\sqrt{a^2-9}}{(a-3)\sqrt{a^2-3^2}}$$
    Solución: $a-3$

29. Efectuar racionalizando
$$\frac{1}{3-\sqrt{2}}+\frac{2}{2\sqrt{3}}-\frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}=$$
    Solución: $\dfrac{-243-123\sqrt{2}+7\sqrt{3}}{21}$

30. Simplificar $\dfrac{15^{\frac{2}{3}}\cdot 9^{\frac{3}{6}}}{25^{-\frac{5}{4}}}$

    Solución: $3^{\frac{5}{3}}\cdot 5^{\frac{19}{6}}$

31. Extraer factores

$$\frac{1}{3xy^2}\sqrt{\frac{5^4(x-2)^3}{8^3x^5y^3}} =$$

Solución: $\frac{5^2(x-2)}{48x^3y}\sqrt{\frac{x-2}{2xy}}$

32. Efectuar

$$3\sqrt[3]{100} - 4\sqrt[3]{100{,}000} - 11\sqrt[3]{100{,}000{,}000}$$

Solución: $-1137\sqrt[3]{100}$

33. Simplificar $\dfrac{\sqrt{x^4 - x^6 + x^2} + 7x}{2x}$

Solución: $\dfrac{\sqrt{x^2 - x^4 + 1} + 7}{2}$

34. Efectuar $\dfrac{3 \cdot 10^{13} + 1'2 \cdot 10^{14}}{3 \cdot 10^{12}}$

Solución: 50

35. Efectuar $\dfrac{z^3 - z}{2z^2 - 4z + 2}$

Solución: $\dfrac{z^2 + z}{2(z-1)}$

36. Simplificar sacando factores fuera de la raíz:

a) $\dfrac{-6 + \sqrt{4 + 8x}}{10}$

b) $\dfrac{2x - \sqrt{x^2 + x^4}}{x}$

Capítulo 3

ECUACIONES Y SISTEMAS DE ECUACIONES

3.1. Ecuación

Una **ecuación** es una igualdad con alguna incógnita que se representa por una letra. Resolver una ecuación es encontrar el valor de la incógnita que hace que se cumpla la igualdad.

Para **resolver** una ecuación se opera hasta dejar sola la incógnita x

Solución de una ecuación es un número que al sustituir por él la incógnita x cumple la igualdad.

3.2. Propiedades de las igualdades y aplicación a la resolución de ecuaciones

1. Si se suma o resta un mismo número a los dos miembros de una igualdad la igualdad se conserva.

   Aplicación a ecuaciones: Se aplica para la transposición de términos: un término que está sumando pasa restando y viceversa.

   Ejemplos:

$3 + x = 5$	$3x + 2 = 5 - 2x$
$(-3 + 3 + x = 5 - 3)$ no se suele poner	$3x + 2x = 5 - 3$
$x = 5 - 3$	$5x = 3$

2. Si se multiplican o dividen los dos miembros de una igualdad por un mismo número, la igualdad se conserva.

   Aplicación a ecuaciones: 1^a Aplicación : quitar denominadores; se multiplica todo por el mínimo común múltiplo de los denominadores. Se va multiplicando cada numerador por lo que le falta a su denominador para ser el denominador común.

Ejemplo: $\dfrac{2x-1}{3}+\dfrac{3x}{5}=1;\quad \dfrac{5(2x-1)+3{,}3x}{15}=\dfrac{15}{15};\quad 5(2x-1)+9x=15$

2^a Aplicación: despejar la x pasando el coeficiente con su signo al otro miembro.

Ejemplos:

$$\begin{array}{l|l} -5x=3 & \dfrac{x}{3}=7 \\ x=-\dfrac{3}{5} & x=21 \end{array}$$

Observaciones:

1. Si al resolver una ecuación llegamos a algo del tipo: $3x=3x+2$, quedaría $0=2$, o sea, no hay solución.

2. Si al resolver una ecuación llegamos a algo del tipo: $2(5x-3)=10x-6$, o sea $10x-6=10x-6$ quedaría $0x=0$, entonces cualquier número es solución, se pierden de vista las soluciones si se simplifica.

3. Si en una ecuación la incógnita está en algún denominador o debajo de raíces, hay que comprobar las soluciones.

   Ejemplo: $\dfrac{x^2-1}{x+1}=0$

   Para anular una fracción se anula el numerador

   $x^2-1=0,\quad x^2=1,\quad x=\pm 1$ para 1: $\dfrac{1-1}{1+1}=0$ si es solución; para -1: $\dfrac{1-1}{-1+1}=\dfrac{0}{0}$ no es solución

   Es decir, no sirven soluciones que anulen denominadores.

   Ejemplo: $\sqrt{x^2-16}=3$

   $\sqrt{(x^2-16)^2}=3^2;\quad x^2-16=9;\quad x^2=25;\quad x=\pm 5$ las dos son soluciones

3.3. Ecuación de segundo grado

La expresión general de una ecuación de segundo grado es $ax^2+bx+c=0$

Cuando alguno de los coeficientes es igual a 0 se llama **ecuación incompleta** de segundo grado.

Hay que tener en cuenta que no existen raíces cuadradas de números negativos.

I) no hay término en x : O sea $b=0$, es de la forma $ax^2+c=0$. se resuelve despejando x.

Ejemplos:

$2x^2-7=0$

$2x^2=7$

$x^2=\dfrac{7}{2}\quad x=\pm\sqrt{\dfrac{7}{2}}\quad \begin{cases} x_1=\sqrt{\frac{7}{2}}=1'87 \\ x_2=-\sqrt{\frac{7}{2}}=-1'87 \end{cases}$

$3x^2+5=0$

$3x^2=-5$

$x^2=\dfrac{-5}{3}\quad x=\pm\sqrt{\dfrac{-5}{3}}$ que no da solución real

II) no hay término independiente: O sea $c = 0$, $ax^2 + bx = 0$. Se saca factor común y se aplica que para que un producto se anule ha de anularse uno de los factores.

Ejemplo: $3x^2 + 2x = 0$;

$$x(3x+2) = 0 \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 : \quad 3x + 2 = 0 \quad 3x = -2 \quad x_2 = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

III) Caso general. Ecuación completa: $ax^2 + bx + c = 0$

Se aplica la fórmula: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Ejemplo:

$3x^2 - 10x + 4 = 0$;

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 4 \cdot 3 \cdot 4}}{6} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 48}}{6} = \frac{10 \pm \sqrt{52}}{6} \quad \begin{cases} x_1 = \frac{10+\sqrt{52}}{6} = 2'86 \\ x_2 = \frac{10-\sqrt{52}}{6} = 0'46 \end{cases}$$

Observaciones:

- Si el coeficiente de x^2 es negativo suele compensar cambiar el signo a todo:

  $-3x^2 + 5x + 8 = 0$

  $$3x^2 - 5x - 8 = 0; \qquad x = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 96}}{6} = \frac{5 \pm \sqrt{121}}{6} = \frac{5 \pm 11}{6} \quad \begin{cases} x_1 = \frac{16}{6} = \frac{8}{3} \\ x_2 = \frac{-6}{6} = -1 \end{cases}$$

- Si la ecuación está descompuesta en factores es más cómodo ir anulando factores:

  $$(8x-5)(3+x) = 0 \qquad \begin{cases} 8x - 5 = 0; \quad x_1 = \frac{5}{8} \\ 3 + x = 0; \quad x_2 = -3 \end{cases}$$

3.4. Demostración de la fórmula de la ecuación de 2^0 grado

Multiplicando los dos miembros de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ por $4a$ resulta:
$4a(ax^2 + bx + c) = 0$
$4a^2x^2 + 4bxa + 4ac = 0$ Transponemos: $4ac$
$4a^2x^2 + 4abx = -4ac$
Sumamos b^2 a los dos miembros para completar el cuadrado del primer miembro; se obtiene:
$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$
En el primer miembro tenemos el cuadrado de un binomio $2ax + b$; luego:
$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$
De donde: $2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$ y despejando x queda: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

3.5. Ecuaciones bicuadradas

Ejemplo:

1. $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$

   Se hace el cambio de variable $y = x^2$; resulta $y^2 = x^4$; queda:

   $$y^2 - 5y - 36 = 0; \quad y = \frac{5 \pm \sqrt{25+144}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{169}}{2} = \frac{5 \pm 13}{2} = \begin{cases} y_1 = 9 \\ y_2 = -4 \end{cases}$$

   $$y_1 = 9; \quad x^2 = 9; \quad x = \pm\sqrt{9} = \pm 3 \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -3 \end{cases}$$

   $y_1 = -4; \quad x^2 = -4; \quad x = \pm\sqrt{-4}$; No da solución real

2. $2x^4 - 2 = 0$

   $2(x^4 - 1) = 0; \quad ((x^2)^2 - 1) = (x^2+1)(x^2-1) = (x^2+1)(x-1)(x+1) = 0$

   las soluciones resultan de anular cada factor: (x^2+1) nunca se anula; $x = 1; x = -1$

3. $2x^4 - 3x^2 - 10 = 0$

   $$2y^2 - 3y - 10 = 0 \quad y = \frac{3 \pm \sqrt{89}}{4} \quad \begin{cases} x^2 = \frac{3+\sqrt{89}}{4} \quad \begin{cases} x_1 = \sqrt{\frac{3+\sqrt{89}}{4}} \\ x_2 = -\sqrt{\frac{3+\sqrt{89}}{4}} \end{cases} \\ x^2 = \frac{3-\sqrt{89}}{4} \text{ no da soluciones reales} \end{cases}$$

3.6. Ecuaciones irracionales

Se caracterizan porque la incógnita está debajo de una raíz.

Se resuelven aislando sucesivamente los radicales y elevando al cuadrado. Hay que comprobar las soluciones.

Ejemplos:

1. $18 - \sqrt{x+10} = 2$

   $\sqrt{x+10} = 16$ elevando al cuadrado $\left(\sqrt{x+10}\right)^2 = 16^2; \quad x + 10 = 256; \quad x = 246$

   comprobamos: $18 - \sqrt{246+10} = 2$ Sirve la solución

2. $\sqrt{x-9} + \sqrt{x-3} = 6$

   $\sqrt{x-9} = 6 - \sqrt{x-3}$ elevando al cuadrado:

   $x - 9 = \left(6 - \sqrt{x-3}\right)^2; \quad x - 9 = 36 + (x-3) - 12\sqrt{x-3}; \quad x - 9 = 36 + x - 3 - 12\sqrt{x-3}$

   $12\sqrt{x-3} = 36 + x - 3 - x + 9; \quad 12\sqrt{x-3} = 42$ Simplificamos $2\sqrt{x-3} = 7$

   elevando al cuadrado: $\left(2\sqrt{x-3}\right)^2 = 7^2$

$4(x-3)=49; \quad x-3=\dfrac{49}{4}; \quad x=\dfrac{49}{4}+3=\dfrac{61}{4}$

Comprobamos $x \approx 15' \ldots$ que al sustituir sale positivo debajo de las raíces. Luego es válida $x=\dfrac{61}{4}$

3.7. Métodos de resolución de sistemas de ecuaciones

Un sistema de ecuaciones son varias ecuaciones que relacionan a las mismas incógnitas.

Se llama **solución del sistema** a los números que cumplen las ecuaciones es decir que al sustituir en el sistema verifican todas las ecuaciones.

- **Método de sustitución**

  Se despeja una incógnita en una ecuación y se sustituye en las otras:

  $$\left\{\begin{array}{l} 2x+3y=9 \\ x-5y=-10 \end{array}\right. \qquad x=5y-10 \qquad \begin{array}{l} 2(5y-10)+3y=9 \\ 10y-20+3y=9 \\ 13y=29 \end{array} \qquad y=\frac{29}{13} \quad x=5\frac{29}{13}-10=\frac{15}{13}$$

- **Método de reducción**

  Se multiplican las ecuaciones por números convenientes para que al sumar desaparezca alguna incógnita:

  Ejemplos:

  1. $\left\{\begin{array}{l} 2x+3y=9 \\ x-5y=-10 \end{array}\right.$ si multiplicamos por -2 abajo y sumamos desaparecerá la x $\left\{\begin{array}{l} 2x+3y=9 \\ \underline{-2x+10y=20} \end{array}\right.$ $\quad 13y=29$

     $y=\dfrac{29}{13}$, sustituyendo en la 2^a obtenemos la x: $x=\dfrac{15}{13}$

  2. $\left\{\begin{array}{l} 3x-8y=2 \\ 5x-9y=6 \end{array}\right.$ multiplicamos la de abajo por el coeficiente de x de la primera y le sumamos la primera multiplicada por el de la segunda cambiado de signo, es decir: $2^a \cdot 3+1^a \cdot (-5)$ $\quad \begin{array}{r} 15x-27y=18 \\ -15x+40y=-10 \\ \hline / \quad 13y=8 \end{array}$

     sustituyendo por ejemplo en la primera $3x-8\dfrac{8}{13}=2; \quad 3x-\dfrac{64}{13}=2; \quad 3x=2+\dfrac{64}{13}=\dfrac{26+64}{13}=\dfrac{90}{13}; \quad x=\dfrac{30}{13}$

  3. Hallar la recta que pasa por los puntos $P(7,2)$ y $Q(5,-3)$

     Buscamos los coeficientes a y b de la expresión $y=ax+b$, para ello aplicamos que pasa por los puntos dados:

     pasa por: $\begin{array}{l} P(7,2) \\ Q(5,-3) \end{array} \qquad \left.\begin{array}{l} 2=7a+b \\ -3=5a+b \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 7a+b=2 \\ 5a+b=-3 \end{array}\right\}$ restando desaparece la b :

     $2a=5; a=\dfrac{5}{2}$

Sustituyendo: $7\frac{5}{2}+b=2;\quad \frac{35}{2}+b=2;\quad b=2-\frac{35}{2};\quad b=-\frac{31}{2}$ luego la recta es $y=\frac{5}{2}x-\frac{31}{2}$

- Método de igualación

  Despejada la misma incógnita en las dos ecuaciones, se igualan los segundos miembros:

  $\begin{cases} y=x^2-4 \\ x-y=2 \end{cases} \quad \begin{cases} y=x^2-4 \\ y=x-2 \end{cases} \; x^2-4=x-2;\quad x^2-x-2=0$

  resolvemos la ecuación de 2^0 grado y resulta:

  $x=\frac{1\pm\sqrt{1-4\cdot1\cdot(-2)}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{9}}{2}\quad \begin{cases} x_1=2 \\ x_2=-1 \end{cases}$

  sustituyendo en la segunda ecuación obtenemos: $\begin{array}{l} x=2\longrightarrow y=0 \\ x=-1\longrightarrow y=-3 \end{array}$

- Método gráfico

  Se representan en los ejes, las coordenadas del punto donde se cortan es la solución:

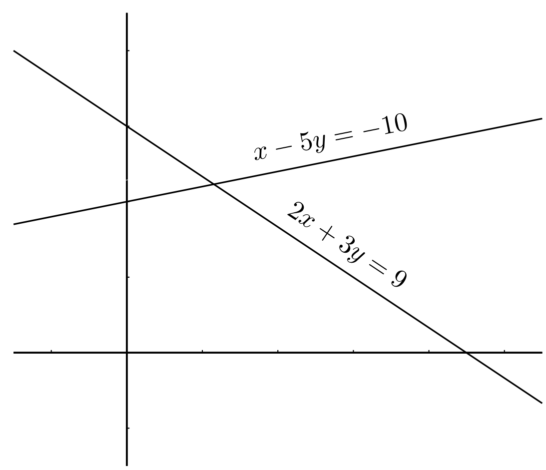
  $\begin{cases} 2x+3y=9 \\ x-5y=-10 \end{cases}$

  $2x+3y=9 \quad \begin{array}{c|cc} x & 0 & 9/2 \\ \hline y & 3 & 0 \end{array}$

  $x-5y=-10 \quad \begin{array}{c|cc} x & 0 & 5 \\ \hline y & 2 & 3 \end{array}$

  $y=\frac{29}{13},\quad x=\frac{15}{13}$

  como se puede ver el dibujo no da las soluciones con precisión.



3.8. Sistemas equivalentes. Método de Gauss de resolución de sistemas

Dos sistemas son **equivalentes** si toda solución del primero lo es del segundo y viceversa.

Teniendo en cuenta que al multiplicar los dos miembros de una igualdad por un número la igualdad subsiste, y de que si se suman varias igualdades resulta otra igualdad. Se tienen las siguientes reglas que permiten pasar de un sistema a otro equivalente más sencillo:

- Se pueden intercambiar dos ecuaciones.

- Se puede multiplicar (dividir) una ecuación por un número distinto de cero.
- A una ecuación se le puede sumar (restar) otra.
- Si hay dos ecuaciones iguales o proporcionales se puede eliminar una.
- Se puede despejar una incógnita en una ecuación y sustituir el resultado en las demás.
- Es equivalente trabajar con las ecuaciones del sistema que trabajar con las filas de la matriz asociada.

El método de Gauss consiste en triangular la matriz asociada. De esta manera queda un sistema equivalente de cuya última ecuación se puede despejar una incógnita y luego ir sustituyendo los valores de las incógnitas de abajo arriba. Es un procedimiento particular de reducción.

Ejemplo Resolver por el método de Gauss

$$\left\{\begin{array}{l} x-2y=-5 \\ 2y+4z=7 \\ x+y-4z=-8 \end{array}\right. \quad \text{la matriz asociada es} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -5 \\ 0 & 2 & 4 & 7 \\ 1 & 1 & -4 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\left\{\begin{array}{lrrrr} 3^a\text{fila} - 1^a & & & & \\ & 1 & 1 & -4 & -8 \\ & 1 & -2 & 0 & -5 \end{array}\right\} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -5 \\ 0 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 3 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\left\{\begin{array}{lrrrr} 3^a \times 2 + 2^a \times (-3) & & & & \\ & 0 & 6 & -8 & -6 \\ & 0 & -6 & -12 & -21 \end{array}\right\} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -5 \\ 0 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & -20 & -27 \end{pmatrix}$$

una vez triangulada volvemos a sistema

$$\left\{\begin{array}{l} x-2y=-5 \\ \;2y+4z=7 \\ -20z=-27 \end{array}\right. \quad \text{resulta despejando y sustituyendo de abajo hacia arriba}$$

$$z=\frac{27}{20}$$

sustituyendo en la segunda:

$$y=\frac{7-4z}{2}=\frac{7-4\frac{27}{20}}{2}=\frac{4}{5}$$

sustituyendo en la primera:

$$x=-5+2y=-5+2\frac{4}{5}=\frac{-17}{5}$$

Ejemplos

1. Estudiar y resolver si es posible el sistema

$$\left\{\begin{array}{l} x+y-z=4 \\ 2x-y+3z=-1 \\ -4x+5y-11z=11 \end{array}\right. \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & -1 \\ -4 & 5 & -11 & 11 \end{pmatrix} \begin{array}{l} 2^a+1^a\cdot(-2) \\ 3^a+1^a\cdot 4 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & 5 & -9 \\ 0 & 9 & -15 & 27 \end{pmatrix} 3^a+2^a\cdot 3 \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & 5 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ eliminamos la última ecuación, sistema compatible indeterminado.

Dejando x e y en el primer miembro y considerando la última matriz resulta: $\left\{\begin{array}{l} x+y=4+z \\ -3y=-9-5z \end{array}\right.$

$y=\dfrac{9+5z}{3}; \quad x=\dfrac{3-2z}{3}; \quad z\in R$

2. Estudiar y resolver si es posible el sistema

$$\left\{\begin{array}{l} 3x+3y+3z=4 \\ 2x+y+2z=2 \\ x+2y+z=1 \end{array}\right. \qquad \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ reordenando } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} 2^a+1^a\cdot(-3) \\ 3^a+1^a\cdot(-2) \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} 3^a-2^a \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

queda $0z=-1$ como última ecuación: sistema incompatible.

3.9. Problemas

1. Resolver
$\dfrac{x+1}{4}+\dfrac{3x-9}{10}=\dfrac{2x-3}{5}-\dfrac{1}{2}$
Solución: -3

2. Resolver $\dfrac{x-4}{5}=\dfrac{2x+3}{3}$
Solución: $-3'8$

3. Resolver $\dfrac{2}{3x}+\dfrac{30}{4}=\dfrac{3}{2x}-\dfrac{1}{6}$
Solución: $5/46$

4. Resolver
$\dfrac{x-2}{3}+\dfrac{2x+1}{4}=3-\dfrac{2x-3}{6}$
Solución: $47/14$

5. Resolver $\dfrac{3x-2}{9}+x-\dfrac{8x}{3}=\dfrac{5x-4}{-3}$
Solución: $14/3$

6. Resolver
$\dfrac{5x-3}{10}+\dfrac{3x-2}{4}=\dfrac{2-3x}{4}+4x$
Solución: $-13/20$

7. Resolver $\dfrac{x-m}{n}=\dfrac{x-n}{m}$
Solución: $m+n$

8. Resolver detallando las propiedades que se aplican: $\dfrac{6x-18}{5}=2x+1$

9. Resolver $3x^2+2x-1=0$
Solución: $1/3,-1$

10. Resolver $3x^2-15=0$
Solución: $\pm\sqrt{5}$

11. Resolver $5x^2+7x=0$
Solución: $0,-7/5$

12. Resolver $x^2+x+1=0$
Solución: no tiene solución real

13. Resolver $2x^2+12x+18=0$
Solución: -3 doble

14. Resolver $5x-x^2/3=3x$
Solución: 0, 6

15. Resolver $\dfrac{x^2}{5}+5=\dfrac{4x^2}{5}-10$
Solución: ±5

16. Resolver $3\sqrt{3}x^2-\sqrt{6}=0$
Solución: $\pm\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}}{3}}$

17. Resolver $\dfrac{\sqrt{2}}{2}x-3x^2=0$
Solución: $0,\ \dfrac{\sqrt{2}}{6}$

18. Resolver $9x^2-12x+7=0$
Solución: no tiene solución real

19. Resolver $2x^2+40x+13=0$
Solución: $-0'33,-19'67$

20. Resolver $\dfrac{5(x-1)}{x+1}=\dfrac{2x+1}{x-1}$
Solución: $4, 1/3$

21. Resolver $\dfrac{5x^2-3}{8}+\dfrac{x}{6}=\dfrac{1}{5}+\dfrac{x^2}{8}$
Solución: $-1'25, 0'92$

22. Resolver $\dfrac{x^2+2}{x^2-6}=\dfrac{2x^2-23}{21-x^2}$
Solución: $\pm\sqrt{2},\pm4$

23. Resolver $x^4+5x^2-36=0$
Solución: $\pm\sqrt{-9}\quad noreal,\pm2$

24. Resolver $27x^4-9x^2=0$
Solución: $\pm\sqrt{-1/3}\quad noreal, 0$

25. Resolver $\sqrt{3x-2}-4=0$
Solución: 6

26. Resolver $\sqrt{x+4} = 3 - \sqrt{x-1}$

    Solución: 13/9

27. Resolver $\dfrac{x-2}{4} - \dfrac{3x-5}{2} = \dfrac{2x}{6}$

    Solución: 24/19

28. Resolver
    $$\frac{5}{6}\left(x - \frac{1}{3}\right) + \frac{4}{6}\left(\frac{x}{5} - \frac{1}{7}\right) = 4 + \frac{8}{9}$$

    Solución: $\dfrac{1105}{203}$

29. Resolver $2 + \sqrt{x-5} = 13 - x$

    Solución: 14, 9

30. Resolver por todos los métodos
    $$\begin{cases} 3x - 2y = 12 \\ 2x + 3y = -6 \end{cases}$$

    Solución: $x = 24/13, y = -42/13$

31. Resolver por todos los métodos
    $$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 3x + 2y = 9 \end{cases}$$

    Solución: $x = 1, y = 3$

32. Resolver $\begin{cases} x - y = 2(x+y) \\ 2x - 3y = 0 \end{cases}$

    Solución: $x = 0, y = 0$

33. Resolver $\begin{cases} \dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{3} \\ 3(x+y-1) = x - y + 1 \end{cases}$

    Solución: $x = 1/2y = 3/4$

34. Resolver $\begin{cases} \dfrac{x-1}{2} + \dfrac{y+1}{3} = 0 \\ \dfrac{2x+y}{3} - \dfrac{x+y+2}{4} = 0 \end{cases}$

    Solución: $x = 11/7, y = -13/7$

35. Resolver
    $$\begin{cases} 3x - (9x + y) = 5y - (2x + 9y) \\ 4x - (3y + 7) = 5y - 47 \end{cases}$$

    Solución: $x = 6, y = 8$

36. Resolver
    $$\begin{cases} x(y-2) - y(x-3) = -14 \\ y(x-6) - x(y+9) = 54 \end{cases}$$

    Solución: $x = -2, y = -6$

37. Resolver $\begin{cases} \dfrac{x-3}{3} - \dfrac{y-4}{4} = 0 \\ \dfrac{x-4}{2} - \dfrac{y-2}{5} = 3 \end{cases}$

    Solución: $x = 162/23, y = 216/23$

38. Resolver $\begin{cases} \dfrac{x-1}{2} - \dfrac{y-1}{3} = -\dfrac{13}{36} \\ \dfrac{x+1}{3} - \dfrac{y+1}{2} = -\dfrac{2}{3} \end{cases}$

    Solución: $x = 1/2, y = 4/3$

39. Entre dos estantes de una librería hay 80 libros. Si se pasan 10 libros del segundo al primer estante, ambos tienen el mismo número de libros. ¿Cuántos había al principio en cada uno?.

    Solución: $x = 30, y = 50$

40. La diferencia de los cuadrados de dos números enteros es igual a 240 veces el menor y sumando 90 unidades a la diferencia de cuadrados es 30 veces el mayor. Hallar dichos números.

    Solución: $x = 3, y = 27$

41. Calcula tres números sabiendo que están en progresión aritmética, que su suma es 18 y que la suma del primero y del segundo es igual al tercero disminuido en dos unidades.

42. Halla los lados de un triángulo rectángulo, sabiendo que sus medidas son números pares consecutivos.

43. Al invertir el orden de las cifras de un número de dos dígitos, este número queda disminuido en 36 unidades. Hallar el número sabiendo que dichas cifras suman 12.

Solución: 84

44. Un abuelo dice a sus nietos: multiplicando mi edad por su cuarta y su sexta parte y dividiendo el producto por los 8/9 de la misma hallaréis 243 años, ¿cuál es mi edad?.

    Solución: 72

45. Dos embarcaciones salen al mismo tiempo para un puerto que dista 224 Km. Una de ellas navega a 2 Km/h más que la otra, y llega al punto donde se dirigen 2 horas antes que la otra. Halla las velocidades.

    Solución: x vel lenta, y tiempo lenta, $x = 14$

46. Hallar el punto donde se cortan la recta que pasa por los puntos $(3, 4), (2, 5)$ y la recta que pasa por los puntos $(-1, 3), (4, 2)$

47. Una factura de 410 rupias es pagada con 3 dólares y 2 libras esterlinas y otra de 2940 rupias con 10 dólares y 20 libras. Calcular el cambio a que están los dólares y las libras.

    Solución: libra: 118 rupias, dólar: 58 rupias

48. Al unir los dos puntos medios de dos lados desiguales de un rectángulo se obtiene un segmento de 50 m de longitud. Hallar el área del rectángulo sabiendo que los lados son entre sí como 4 es a 3.

    Solución: 4800

49. Se llena una caja de forma cúbica con cubitos de un cm de arista y nos sobran 272 cubitos. Se construye otra caja que tiene un cm más de arista y entonces nos faltan 197 cubitos. ¿Cuántos cubitos tenemos?.

    Solución: número cubitos $= y$, arista$= x$, caben x^3, $y = 2000$

50. Resolver
$$\begin{cases} \dfrac{1}{2x-3y+6} = \dfrac{1}{3x-2y-1} \\ \dfrac{6}{x-y+4} = \dfrac{10}{y+2} \end{cases}$$
    Solución: $x = 73/7, y = 932/133$

51. Resolver $\begin{cases} \dfrac{6x+9y-4}{4x-6y+5} = \dfrac{2}{5} \\ \dfrac{2x+3y-3}{3x+2y-4} = \dfrac{6}{11} \end{cases}$

    Solución: $x = 4719/2134, y = 27/97$

    Resolver por el método de Gauss

52. $\begin{cases} 3x+3y+2z = 4 \\ -x+3y+2z = 0 \\ 2x+5y+6z = -2 \end{cases}$

    Solución: $x = 1, y = 7/4, z = -17/8$

53. $\begin{cases} -2x+3y+2z = 4 \\ -x+3y+z = 0 \\ 2x+7y+6z = -2 \end{cases}$

    Solución: $x = -25/12, y = -4/3, z = 23/12$

54. $\begin{cases} 3x+3y+2z = 1 \\ -x+3y-z = 0 \\ 2x+5y+z = -2 \end{cases}$

    Solución: $x = -26, y = 3, z = 35$

55. $\begin{cases} -2x+y-2z = 3 \\ -6x+6y = 6 \\ -2x+3y+2z = 1 \end{cases}$

    Solución: $x = -2-2z, y = -1-2z$

56. $\begin{cases} 2x-2y+z = 1 \\ 5x-4y+3z = 1 \\ -5x+6y-2z = -4 \end{cases}$

    Solución: $x = -1-z, y = -3/2-z/2$

57. $\begin{cases} -2x-2y+2z = 3 \\ -2x-4y+z = 8 \\ -2x+2y+4z = 2 \end{cases}$

    Solución: incompatible

Capítulo 4

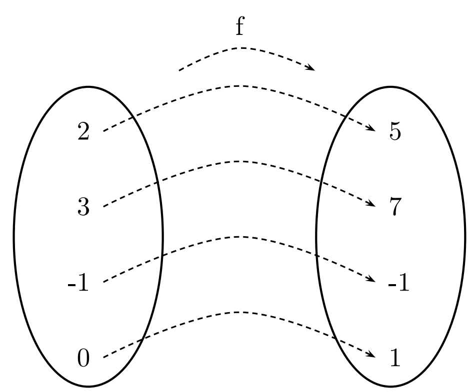
POLINOMIOS

4.1. Función

Una función transforma números en números,
Ejemplo

$$\begin{array}{ll} f: & Z \longrightarrow Z \\ & x \longrightarrow f(x) = 2x + 1 \end{array}$$

Esta función de los números enteros en los números enteros le asocia a cada número su doble más uno.



En general una función se representa : $y = f(x)$

x es un elemento cualquiera del conjunto original, se llama variable independiente;

y representa su correspondiente imagen en el conjunto final, se llama variable dependiente.

La forma habitual de dar una función es indicar las operaciones que hay que hacer con la x para obtener su correspondiente imagen y.

4.2. Función polinómica. Polinomio

Las funciones polinómicas son las del tipo: $y = 2x^3+43x^2+18x-66, \quad y = x^4-13x, \quad y = 3x-2.$

En general un función polinómica es una función de la forma:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n$$

Donde $a_0, a_1, a_2, \ldots$ son numeros reales, se llaman **coeficientes**.

La expresión que hay a la derecha del igual $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n$ se llama **polinomio**.

Cuando hay un solo sumando se llama monomio y cuando hay dos se llama binomio.

Grado de un polinomio es el mayor exponente de x cuyo coeficiente sea distinto de 0.

Dos polinomios son iguales cuando cada coeficiente del mismo grado es igual.

Ejemplo: $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$. Por tanto dan el mismo resultado para cualquier valor de x.

Cuando son distintos, por ejemplo: $2x^2+1 = 2x+4$ es una ecuación. Sólo se cumple la igualdad para algunos valores de x: las soluciones de la ecuación.

El conjunto de polinomios se representa $R[x]$.

4.3. Operaciones con polinomios

Suma El grado de la suma de dos polinomios es menor o igual que el grado de los sumandos:

$f(x) = 1 - 2x^2 + x \longrightarrow$ Grado 2
$g(x) = 2x^2 + 3x \longrightarrow$ Grado 2

$f(x) + g(x) = 4x + 1 \longrightarrow$ Grado 1

La suma verifica las propiedades asociativa, commutativa, elemento neutro: "cero" y elemento simétrico que se llama polinomio opuesto.

Por ejemplo la asociativa se expresa asi: $f(x) + [g(x) + h(x)] = [f(x) + g(x)] + h(x)$

Producto El grado del polinomio del producto es la suma de los grados de los polinomios factores.

El producto verifica las propiedades asociativa, commutativa, elemento neutro: "unidad" y además el producto es distributivo respecto de la suma.

Por ello el conjunto de los polinomios es anillo, commutativo y unitario.

4.4. Binomio de Newton

Veamos las sucesivas potencias de el binomio $(x+a)$:

$(x+a)^1 = (x+a)$
$(x+a)^2 = x^2 + a^2 + 2xa$
$(x+a)^3 = x^3 + 3x^2a + 3xa^2 + a^3$
$(x+a)^4 = x^4 + 4x^3a + 6x^2a^2 + 4xa^3 + a^4$
$(x+a)^5 = x^5 + 5x^4a + 10x^3a^2 + 10x^2a^3 + 5xa^4 + a^5$

cuyos coeficientes son los del triángulo de Tartaglia:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

En general, Binomio de Newton:

$(x+a)^n = x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}.a + \binom{n}{2}x^{n-2}.a^2 + \binom{n}{3}x^{n-3}.a^3 + \ldots + \binom{n}{n}a^n$

$(x-a)^n = x^n - \binom{n}{1} x^{n-1}.a + \binom{n}{2} x^{n-2}.a^2 - \binom{n}{3} x^{n-3}.a^3 + \cdots \pm \binom{n}{n} a^n$
O sea cuando es $(x-a)^n$, se va alternando el signo.

Ejemplo: Efectuar dando el resultado en forma binómica:
$(3i-2)^7 = 2187\,i^7 - 10206\,i^6 + 20412\,i^5 - 22680\,i^4 + 15120\,i^3 - 6048\,i^2 + 1344\,i - 128 = 4449\,i - 6554 = -6554 + 4449\,i$

4.5. División de polinomios

En los numeros teníamos la división entera: $\begin{array}{r|l} 37 & 12 \\ \cline{2-2} 01 & 3 \end{array}$

Cumpliéndose: "dividendo = divisor × cociente + resto"

De la misma forma para los polinomios:

$$\begin{array}{rrrrrrr|l} 4x^3 & - & 2x^2 & + & 9x & + & 1 & 2x^2 - x \\ \cline{8-8} -4x^3 & + & 2x^2 & & & & & 2x \\ \cline{1-7} / & & / & & 9x & + & 1 & \end{array}$$

En los polinomios se puede dividir hasta que el resto es de menor grado que el divisor.

También: dividendo = divisor × cociente + resto, abreviadamente: $D = d \times Q + R$
$4x^3 - 2x^2 + 9x + 1 = (2x^2 - x)\cdot 2x + (9x + 1)$
Observamos que el grado del dividendo es igual al grado del divisor más el grado del cociente.

4.6. Regla de Ruffini

Es un procedimiento abreviado de división, cuando el divisor es de la forma $x - a$:
Ejemplo: $(2x^3 - 3x^2 + 1) : (x - 8)$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -3 & 0 & 1 \\ 8 & & 16 & 104 & 832 \\ \hline & 2 & 13 & 104 & \boxed{833} \end{array} \qquad \begin{array}{l} Q = 2x^2 + 13x + 104 \\ R = 833 \end{array}$$

4.7. Valor numérico de un polinomio

Valor numérico de un polinomio para $x = b$ es lo que resulta de sustituir en el polinomio x por b:

Valor numérico para $x = 2$ de $f(x) = 5x^3 + 2x^2 - 7$, es: $f(2) = 5\cdot 8 + 2\cdot 4 - 7 = 40 + 8 - 7 = 41$

Un número b es **raíz** de un polinomio cuando el valor numérico del polinomio en b es 0, es decir, b es raíz de $f(x)$ cuando $f(b) = 0$.
Ejemplo: 2 es raíz de $f(x) = 3x^3 - 5x^2 - 4$ porque $f(2) = 3\cdot 8 - 5\cdot 4 - 4 = 0$

Por tanto, es lo mismo decir que b es raíz del polinomio $f(x)$, que decir que b es solución de la **ecuación** $f(x) = 0$.

Ejemplo:
2 es raíz de $f(x) = 3x^3 - 5x^2 - 4$, es igual que, 2 es solución de la ecuación $3x^3 - 5x^2 - 4 = 0$.

4.8. Teorema del resto

El resto de dividir un polinomio por $x - a$ es igual al valor numérico del polinomio en a, es decir, el resto de dividir $f(x)$ por $x - a$ es $R = f(a)$.

Ejemplo: $f(x) = 3x^5 + 4x^2 - 5$, dividido por $x - 1$

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 3 & 0 & 0 & 4 & 0 & -5 \\ 1 & & 3 & 3 & 3 & 7 & 7 \\ \hline & 3 & 3 & 3 & 7 & 7 & \boxed{2} \end{array} \quad \begin{array}{l} Q = 3x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 7x + 7 \\ R = 2 \end{array} \qquad f(1) = 2$$

Consecuencia Si a es una raíz entera de un polinomio tiene que ser un divisor del término independiente. Por tanto, para buscar las raíces enteras de un polinomio por Ruffini, hay que probar los divisores del término independiente.

Ejemplo: Resolver la ecuación: $2x^3 - 5x^2 + 2x - 15 = 0$
Los divisores de -15 son $\pm1, \pm3, \pm5, \pm15$

probemos $x = 3$ por Ruffini: $\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -5 & 2 & -15 \\ 3 & & 6 & 3 & 15 \\ \hline & 2 & 1 & 5 & \boxed{0} \end{array}$

Como el cociente $2x^2 + x + 5$ es de 2^0 grado para buscar otras soluciones es mejor resolver la ecuación de segundo grado
$x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 - 40}}{4}$ que no da soluciones reales
luego 3 es la única raíz real de $f(x)$.

Consecuencia Son equivalentes los tres enunciados siguientes:

a **es raíz del polinomio** $f(x)$**; el polinomio** $f(x)$ **es divisible por** $x - a$**;** $(x - a)$ **es un factor de la descomposición en factores de** $f(x)$

4.9. Descomposición de un polinomio en factores

Para hallar las raíces y descomponer un polinomio las herramientas son: factor común, diferencia de cuadrados, ecuación de segundo grado, ecuación bicuadrada y en último caso Ruffini. Al final hay que ajustar el coeficiente principal (el coeficiente de la potencia de mayor grado).

En la descomposición en factores si se han obtenido raíces fraccionarias se multiplica por el coeficiente principal:
Ejemplo: 2 es raíz de $f(x) = 3x^3 - 5x^2 - 4$ porque $f(2) = 0$, lo que equivale a decir:
$x = 2$ es solución de la ecuación $3x^3 - 5x^2 - 4 = 0$, lo que equivale a decir:

$(x-3)$ es factor de la descomposición en factores de $f(x) = 3x^3 - 5x^2 - 4$

Ejemplos:

1. $f(x) = x^5 - 9x = x(x^2-3)(x^2+3) = x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})(x^2+3)$, las raíces son: $0, \sqrt{3}, -\sqrt{3}$

2. En el polinomio de la ecuación anterior la descomposición es:

   $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 2x - 15 = (2x^2 + x + 5)(x-3)$

3. $x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 7x + 6$ tiene como raíces: $x = -1$ doble; $x = 2$; $\quad x = 3$ la descomposición es: $x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 7x + 6 = (x+1)^2(x-2)(x-3)$

4. $3x^2 + 5x - 2 = 3(x+2)\left(x - \frac{1}{3}\right)$

Los polinomios que no se pueden descomponer son los de grado 1 y los de grado 2 sin raíces reales.

Ejemplo: Hallar un polinomio de segundo grado cuyo término independiente sea 5 y en el que el resto de dividirlo por $(x-2)$ sea -3 y su valor numérico en -1 es 6

El polinomio es $p(x) = ax^2 + bx + 5$

Que el resto de dividirlo por $(x-2)$ sea -3 equivale a que el valor numérico en $x = 2$ es -3: $p(2) = 4a + 2b + 5 = -3; \quad 4a + 2b = -8$

El valor numérico en -1 es $p(-1) = a - b + 5 = 6; \quad a - b = 1$

Resolviendo el sistema: $\left\{ \begin{array}{l} 4a + 2b = -8 \\ a - b = 1 \end{array} \right.$ Resulta $a = -1; b = -2$

El polinomio es $p(x) = -x^2 - 2x + 5$

Ejemplo: Hallar un polinomio de tercer grado que cumpla:

I)El coeficiente principal es 2.

II) El número 6 es una raíz.

III) El valor numérico en $x = -1$ es el mismo que el resto de dividir el polinomio por $(x-3)$.

IV) Es divisible por $(x-5)$.

I) $f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + c$

II) $f(6) = 0; \quad 2 \cdot 6^3 + a \cdot 6^2 + b \cdot 6 + c = 0; \quad \underline{36a + 6b + c = -432}$

III) $f(3) = f(-1) \left\{ \begin{array}{l} f(3) = 2 \cdot 3^3 + a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c = 9a + 3b + c + 54 \\ f(-1) = 2 \cdot (-1)^3 + a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c = -2 + a - b + c \end{array} \right\}$

$9a + 3b + c + 54 = -2 + a - b + c; \quad \underline{2a + b = -14}$

IV) $f(5) = 0; \quad 2 \cdot 5^3 + a \cdot 5^2 + b \cdot 5 + c = 0; \quad \underline{25a + 5b + c = -250}$

Queda el sistema:

$$\begin{cases} 2a+b=-14 \\ 36a+6b+c=-432 \\ 25a+5b+c=-250 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -14 \\ 36 & 6 & 1 & -432 \\ 25 & 5 & 1 & -250 \end{pmatrix} \begin{array}{l} 2^a + 1^a \cdot (-18) \\ 3^a \cdot 2 + 1^a \cdot (-25) \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -14 \\ 0 & -12 & 1 & -180 \\ 0 & -15 & 2 & -150 \end{pmatrix} 3^a \cdot 4 + 2^a \cdot (-5) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -14 \\ 0 & -12 & 1 & -180 \\ 0 & 0 & 3 & 300 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2a+b=-14 \\ -12b+c=-180 \\ 3c=300 \end{cases} \qquad c=100, \quad b=\tfrac{70}{3}, \quad a=\tfrac{-56}{3}$$

El polinomio es: $f(x)=2x^3-\dfrac{56}{3}x^2+\dfrac{70}{3}x+100$

Otro método: El polinomio general de grado 3 es ax^3+bx^2+cx+d para evitar tantas incógnitas aplicamos la descomposición en factores:

Como 6 es raíz es divisible por $x-6$, luego $(x-6)$ es factor de su descomposición en factores.

Otro factor es $(x-5)$

Luego el polinomio es $p(x)=(x-5)(x-6)(mx+n)=(x^2-11x+30)(mx+n)$

Como el coeficiente principal es 2 tenemos que $m=2$ queda: $p(x)=(x^2-11x+30)(2x+n)$

La condición III) se puede escribir $p(-1)=p(3)$

$p(-1)=((-1)^2-11(-1)+30)(2(-1)+n)=42n-84$

$p(3)=(3^2-11\cdot 3+30)(2\cdot 3+n)=6n+36$

Igualando: $42n-84=6n+36; \quad n=\frac{10}{3}$

Resulta: $(x^2-11x+30)(2x+\dfrac{10}{3})=2x^3-\dfrac{56}{3}x^2+\dfrac{70}{3}x+100$

4.10. Gráfica de una función

Dada una función $y=f(x)$, los puntos de coordenadas $(x,f(x))$ representan puntos del plano, el conjunto de ellos es la gráfica de la función.

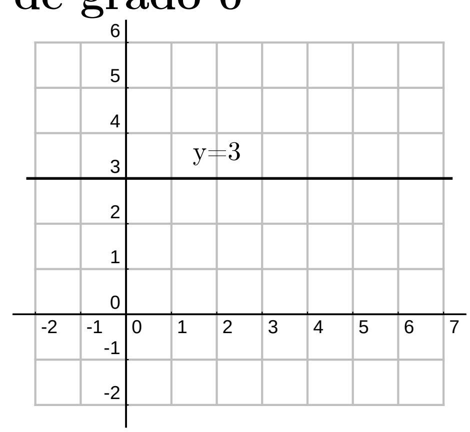
4.11. Gráfica de una función polinómica de grado 0

Sea por ejemplo $y=3$

(podemos pensar en $y=3+0x$)

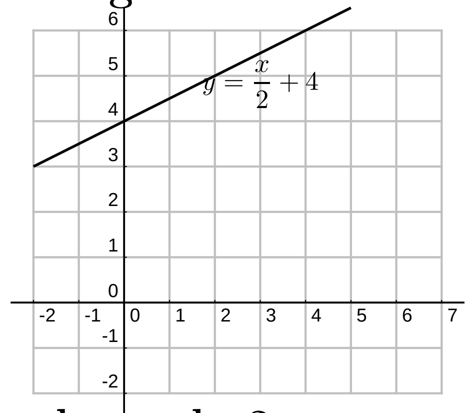
x	0	1	2	3
y	3	3	3	3

La gráfica de una función polinómica de grado cero, o sea, y = constante, es una recta paralela al eje de abcisas



De manera parecida la representación de $x=-5$ será una recta vertical

4.12. Gráfica de una función polinómica de grado 1



La gráfica de una función polinómica de grado 1, o sea, $y = ax + b$, es una recta que se determina hallando únicamente dos puntos.

Ejemplo: $y = \dfrac{x}{2} + 4$

x	0	4
y	4	6

4.13. Gráfica de una función polinómica de grado 2

La gráfica de una función polinómica de grado 2, o sea, $y = ax^2 + bx + c$, es una parábola.

Para representarla hacemos los siguientes pasos:

1. si el coeficiente de x^2 es positivo es abierta hacia arriba $\bigcup$

   si el coeficiente de x^2 es negativo es abierta hacia abajo $\bigcap$

2. hallamos los puntos de corte con los ejes

   con el eje OX se hace $y = 0$ y se resuelve la ecuación de 2^0 grado

   con el eje OY se hace $x = 0$

3. hallamos el vértice: la abcisa del vértice viene dada por $x_v = \dfrac{-b}{2a}$, para hallar y_v sustituimos x_v en la función

4. si tenemos pocos puntos para representar hallamos alguno más dando valores a la x.

Ejemplos:

1. $y = x^2 - 4x$

   1) abierta hacia arriba

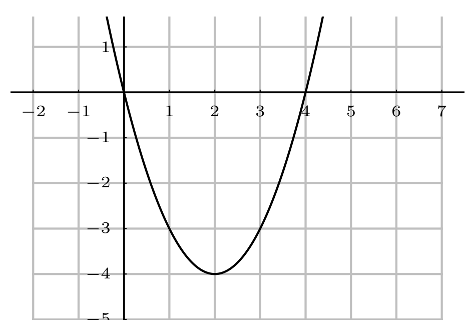
   2) cortes con los ejes

   con OX, $\quad y = 0,$ resulta: $0 = x^2 - 4 = x(x - 4)$ $\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 4 \end{array}$

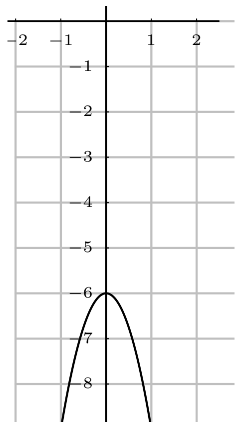
   con OY, $\quad x = 0$, ya hallado.

   3) vértice $x_v = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{4}{2} = 2, \quad y_v = -4$

	x	y
	0	0
	4	0
vértice	2	-4



2. $y = -3x^2 - 6$



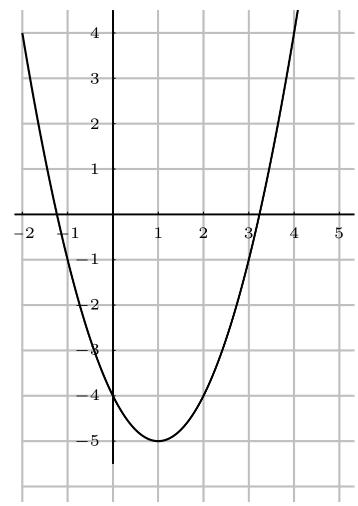
1) abierta hacia abajo
2) cortes con los ejes
con OX, $\quad y = 0, \quad 0 = -3x^2 - 6$ que no da raíces reales
con OY, $\quad x = 0, \quad y = -6$
3) vértice $x_v = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{0}{6} = 0, \quad y_v = -6$

interesa dar más valores:

	x	y
vértice	2	-4
	1	-9
	-1	9

3. $f(x) = x^2 - 2x - 4$
1) abierta hacia arriba
2) Cortes con los ejes
$y = 0$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 16}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{20}}{2} \approx \begin{cases} 3'23 \\ -1'23 \end{cases}$$
3) vértice $x_v = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{2}{2} = 1$

	x	y
	$3'23$	0
	$-1'23$	0
vértice	1	-5
	0	-4
	-2	4



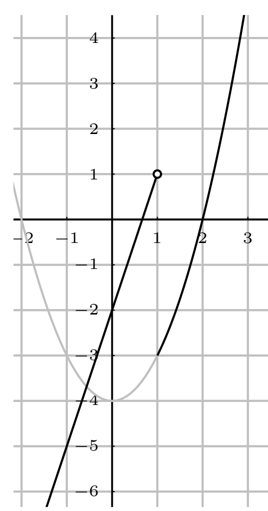
4. $f(x) = \begin{cases} 3x - 2 & si \quad x < 1 \\ x^2 - 4 & si \quad x \geq 1 \end{cases}$

El primer trozo es una recta y el segundo una parábola.

La parábola es abierta hacia arriba, y los puntos de corte son: con OX en $x = \pm 2$; con OY= en $y = -4$ que es también el vértice.

Interesa dar los valores del dominio donde cambia la expresión de la función:

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 2 \quad si \quad x < 1 & \begin{array}{c|cc} x & 0 & 1 \\ \hline y & -2 & 1 \end{array} \\ x^2 - 4 \quad si \quad x \geq 1 & \begin{array}{c|cc} x & 1 & 2 \\ \hline y & -3 & 0 \end{array} \end{cases}$$



4.14. Problemas

1. Siendo $f = 3x^2 - x, \quad g = 3x^4 - x^2$, hallar $f.g - f^2$.

   Solución: $9x^6 - 3x^5 - 12x^4 + 7x^3 - x^2$

2. Multiplicar en línea

   a) $(3x^2 - 2x)(1 - x)$

   b) $(5x^2 - 2x^3)(3x^3 + 2x)$

   Solución: a)$-3x^3 + 5x^2 - 2x$

   b) $-6x^6 + 15x^5 - 4x^4 + 10x^3$

3. Calcular $(x + 5)^4 =$

   Solución: $x^4 + 20x^3 + 150x^2 + 500x + 625$

4. Calcular $(2x - 3)^3 =$

   Solución: $8x^3 - 36x^2 + 54x - 27$

5. Calcular $(2 + i)^5 =$

   Solución: $-38 + 41i$

6. Calcular $(2i - 3)^4 =$

   Solución: $-120i - 119$

7. Calcular $(-2 - 4i)^3 =$

   Solución: $-88 + 16i$

8. Efectuar $(5x^4 + 2x^3) : (x^2 - 3x)$

   Solución: $Q = 5x^2 + 17x + 51,\ R = 153x$

9. Efectuar

   $(6x^5 - x^3 + x^2) : (2x^4 - x)$

   Solución: Q $= 3x$, R $= -x^3 + 4x^2$

10. Efectuar $(4x^6 - 2x^4 + x) : (2x^4 + x^3)$

    Solución: Q $= 2x^2 - x - \frac{1}{2}$, R $= \frac{1}{2}x^3 + x$

11. Siendo $f = 3x^2 - 5x, \quad g = 2x^2 + x - 1$. Hallar $f.g - g^2$

    Solución: $2x^4 - 11x^3 - 5x^2 + 7x - 1$

12. Efectuar $\dfrac{\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x-2}}{1 + \frac{4}{x^2-4}} =$

    Solución: $-\dfrac{4}{x^2}$

13. Efectuar

    $$\frac{ax + ay}{bx - by} . \frac{x^2 - 2xy + y^2}{x^2 - y^2} . \frac{b}{ay - a} =$$

    Solución: $\dfrac{1}{y - 1}$

14. Efectuar $\dfrac{16(x-2)^2 - 16x(x-2)}{(x-2)^4} =$

    Solución: $\dfrac{-32}{(x-2)^3}$

15. Dividir $(5x^3 - 2x^2 + 3) : (x^2 - 3) =$

    Solución: $Q = 5x - 2, R = 15x - 3$

16. Dividir por Ruffini $(3x^8 - 5x^2 + 7x) : (x + 1) =$

    Solución: $Q = 3x^7 - 3x^6 + 3x^5 - 3x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 2x + 9, R = -9$

17. Dividir por Ruffini $(2x^5 - 3x^2 + 3) : ((x - 2) =$

    Solución: $Q = 2x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 13x + 26, R = 55$

18. Llamando $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$ respectivamente a los dividendos de los tres problemas anteriores, hallar $f(4)$, $g(-1)$, $h(2)$ y $h(-3)$.

    Solución: $f(4) = 291, g(-1) = -9, h(2) = 55, h(-3) = -510$

19. Hallar un polinomio de 2^o grado verificando: no tiene término independiente, el valor numérico en 3 es igual al resto de dividirlo por $x - 1$, toma el valor 16 en -2.

    Solución: $\dfrac{4}{3}x^2 - \dfrac{16}{3}x$

20. Hallar un polinomio de 2^o grado que sea divisible por $x-3$, que tome el valor 5 para $x=-2$ y cuyo coeficiente principal sea 1.

    Solución: x^2-2x-3

21. Hallar a para que la división siguiente sea exacta $(x^5-7x^4-ax^2+1):(x-2)$

    Solución: $-79/4$

22. Efectuar

    $(2x^6-x^5+x^4):(x^3+2x)=$

    Solución: $Q=2x^3-x^2-3x+2, R=6x^2-4x$

23. Efectuar

    $(2x^4-x^3):(2x^3+x)=$

    Solución: $Q=x-1/2, R=-x^2+x/2$

24. Efectuar $(6x^4-5x^2):(x-1)=$

    Solución: $Q=6x^3+6x^2+x+1, R=1$

25. Efectuar

    $(8x^4+2x^3-3x^2+x+5):(4x^2-x)=$

    Solución: $Q=2x^2+x-1/2, R=x/2+5$

26. Hallar las raíces de

    $f(x)=x^3-12x^2+7x$

    Solución: $0, 6\pm\sqrt{29}$

27. Hallar las raíces de

    $f(x)=x^4-2x^2+1$

    Solución: ± 1, dobles

28. Hallar las raíces de

    $f(x)=3x^3-10x-51$

    Solución: 3

29. Hallar las raíces de

    $f(x)=5x^3-37x^2+64x-20$

    Solución: $2, 5, 2/5$

30. Hallar las raíces de

    $f(x)=x^4-3x^3-3x^2+7x+6$

    Solución: $2, 3, -1$ doble

31. Hallar las raíces de

    $f(x)=x^4-3x^3-10x^2+24x$

    Solución: 0, 2,4,-3

32. Hallar las raíces y descomponer

    $f(x)=x^3+2x^2-5x-6$

    Solución: $2, -1, 3$

33. Hallar las raíces y descomponer

    $f(x)=x^4-x$

    Solución: $x(x-1)(x^2+x+1)$

34. Descomponer $f(x)=x^5-4x$

    Solución: $x(x^2+2)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$

35. Descomponer $f(x)=x^3-2x^2-x$

    Solución: $x[x-(1-\sqrt{2})][x-(1+\sqrt{2})]$

36. Descomponer $f(x)=2x^5-18x$

    Solución: $2x(x^2+3)(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$

37. Descomponer

    $f(x)=x^4-2x^3-5x^2+6x$

    Solución: $x(x-1)(x-3)(x+2)$

38. Descomponer

    $f(x)=x^3-9x^2+26x-24$

    Solución: $(x-2)(x-3)(x-4)$

39. Descomponer $f(x)=2x^4-4x^2+2$

    Solución: $2(x-1)^2(x+1)^2$

40. Hallar las raíces y descomponer

    $f(x)=2x^4-4x^2$

    Solución: $2x^2(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$

41. Despejar la x en: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{x}{g}}$

    Solución: $x = g\left(\dfrac{T}{2\pi}\right)^2$

42. Efectuar
    $3 - \dfrac{4x}{1-x^2}$

43. Efectuar
    $\dfrac{2x^2 - x}{x+1} - 2x$

44. Simplificar
    $\dfrac{3x^2 - 5x + 2x^3}{x^2 - x}$

45. Efectuar
    $\dfrac{2x+3}{1-x^2} - \dfrac{x}{1+x}$

46. Resolver
    $\dfrac{x^2+1}{x^2-2x} - 1 = 0$
    Solución: $-1/2$

47. Resolver
    $2 + \dfrac{2x+1}{3x+1} = 0$
    Solución: -3/8

48. Resolver
    $\dfrac{2x(x^2-x-2) - x^2(2x-1)}{(x^2-x-2)^2} = 0$
    Solución: 0 y -4

49. Resolver
    $2 + \dfrac{(2x-1)(x-1) - (x^2-x+4)}{(x-1)^2} = 0$

    Solución: $x = \dfrac{6 \pm \sqrt{48}}{6}$

50. Representar gráficamente

    $3x - y = 2$

51. Representar gráficamente

    $4x - 5y - 24 = 0$

52. Representar gráficamente

    $y = \dfrac{1}{4}x^2 - 16$

53. Representar gráficamente

    $y = -x^2 - 5x - 6$

54. Representar gráficamente

    $y = (x-3)(1+x)$

55. Representar gráficamente

    $y = (x-3)(5-x)$

56. Representar gráficamente

    $y = 4 + x^2$

57. Representar gráficamente

    $$y = \begin{cases} x+1 & para \quad x < 2 \\ -x+2 & para \quad x \geq 2 \end{cases}$$

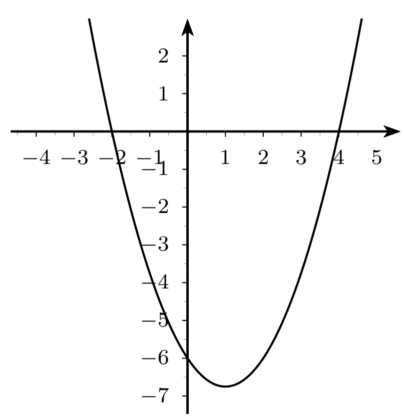
58. Representar gráficamente

    $$y = \begin{cases} 2x+1 & para \quad x \leq -2 \\ x^2+4x+4 & para \quad x > -2 \end{cases}$$

59. Representar gráficamente

    $$y = \begin{cases} (x+3)(x-2) & para \quad x \leq 1 \\ 2x-3 & para \quad x > 1 \end{cases}$$

60. Hallar la ecuación de la parábola:

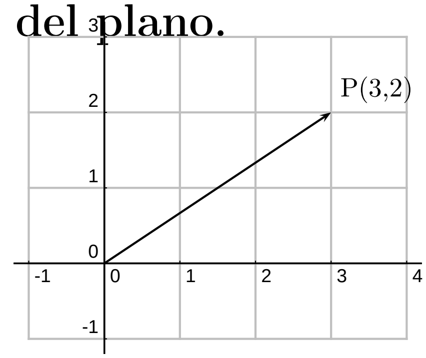


Solución: $y = 3x^2/4 - 3x/2 - 6$

Capítulo 5

VECTORES EN EL PLANO. TRIGONOMETRÍA

5.1. Espacio vectorial de los vectores libres del plano.

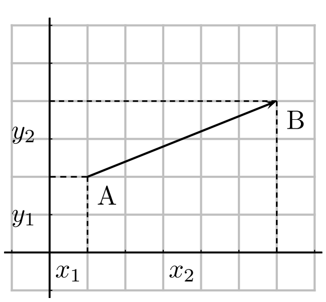


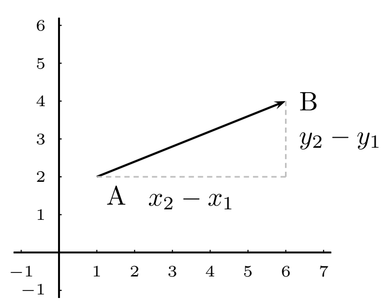
Consideremos R^2 conjunto de pares ordenados de números reales por ejemplo (3,2), se les llama vectores, en general representaremos estos elementos por:

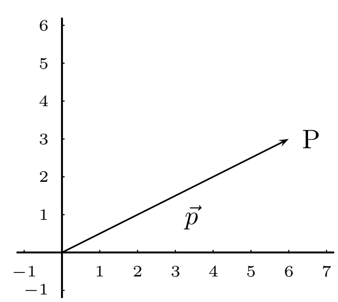
$$\vec{a} = (a_1, a_2), \text{ con } a_i \in R$$

Se representan en el plano dotado de un sistema de coordenadas OXY.

Dado un par de puntos $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ queda determinado un vector $\vec{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$, es decir las coordenadas del vector son las coordenadas del punto extremo menos las coordenadas del punto origen.

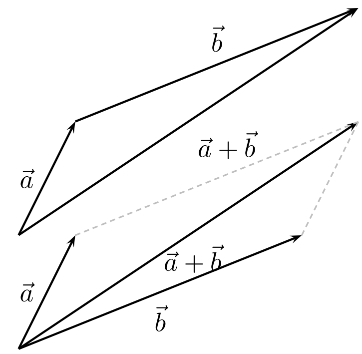






En particular dado un punto $P(x_0, y_0)$, se llama vector de posición del punto P al vector $\vec{OP} = (x_0, y_0)$, se representa por la misma letra del punto minúscula $\vec{p}$.

5.2. Operaciones con vectores



Suma de vectores: se suman componente a componente, dados: $\vec{a}=(a_1,a_2),\vec{b}=(b_1,b_2)$,

$$\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1,a_2+b_2)$$

Gráficamente: diagonal del paralelogramo o uno a continuación del otro

Propiedades de la suma:

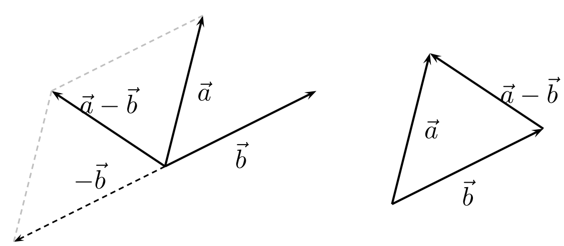
asociativa: $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$

conmutativa: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

elemento neutro: (vector nulo) $\vec{0}=(0,0)$

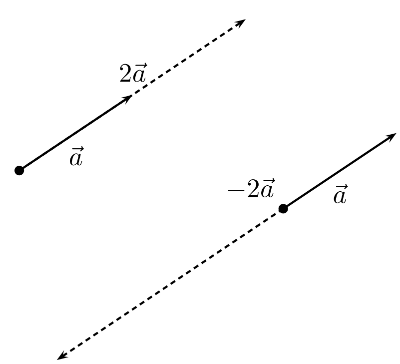
elemento simétrico (vector opuesto): $-\vec{a}=(-a_1,-a_2)$ con $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ de R^2

Para restar dos vectores:
a) Se suma el opuesto
b) Otra diagonal del paralelogramo



Producto de un escalar por un vector: se multiplica cada componente sean: $\alpha\in R,\vec{a}=(a_1,a_2)$

$$\alpha.\vec{a}=(\alpha a_1,\alpha a_2)$$



Gráficamente: se lleva el vector $\vec{a}$ $''\alpha''$ veces, se obtiene un vector de igual dirección, con el mismo sentido si α es positivo y sentido contrario si α es negativo.

Propiedades del producto de un escalar por un vector:

pseudoasociativa $(\alpha.\beta).\vec{a}=\alpha.(\beta.\vec{a})$

producto por la unidad $1.\vec{a}=\vec{a}$

distributiva respecto de la suma de escalares $(\alpha+\beta).\vec{a}=\alpha.\vec{a}+\beta.\vec{a}$

distributiva respecto de la suma de vectores $\alpha.(\vec{a}+\vec{b})=\alpha.\vec{a}+\alpha.\vec{b}$

con $\vec{a},\vec{b},$ de R^2 y con $\alpha,\beta,$ de R.

El conjunto R^2 con la suma, el producto por escalar y las propiedades que verifican tiene estructura de espacio vectorial, abreviadamente: $(R^2,+,.R)$ e. v.

Observaciones

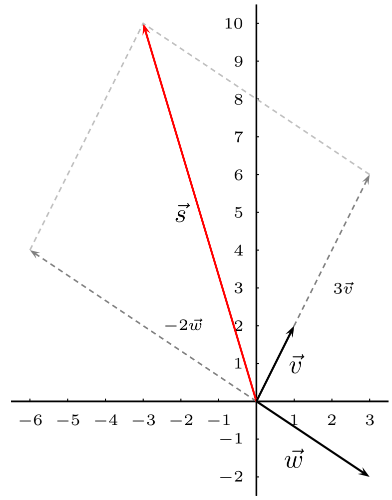
1. Dos vectores tienen **igual dirección** cuando uno de ellos es igual al otro multiplicado por un número. Esto se traduce en que sus coordenadas son **proporcionales**:

   $\vec{v} = (2, -4), \vec{w} = (-3, 6), \vec{w} = \frac{-3}{2}\vec{v}, \quad \frac{2}{-3} = \frac{-4}{6}$

2. **Combinación lineal** de unos vectores dados es toda suma de esos vectores multiplicados por escalares.

   Ejemplo: Dados los vectores $\vec{a} = (4, -1), \vec{b} = (2, 5)$ el vector $3\vec{a} + 7\vec{b} = 3(4, -1) + 7(2, 5) = (26, 32)$ es una combinación lineal de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$

   Ejemplo: Comprobar si el vector $\vec{s} = (-3, 10)$ es combinación lineal de los vectores $\vec{v} = (1, 2), \vec{w} = (3, -2)$

   $\vec{s} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{w}$

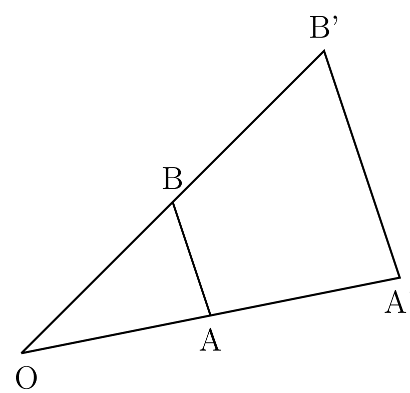
   $(-3, 10) = \alpha(1, 2) + \beta(3, -2)$ separando coordenadas

   $\begin{cases} -3 = \alpha + 3\beta \\ 10 = 2\alpha - 2\beta \end{cases} \qquad \beta = -2; \alpha = 3$ luego

   $$\vec{s} = 3\vec{v} - 2\vec{w}$$

3. Dos vectores del espacio vectorial R^2 se dice que forman **base** cuando cualquier vector se puede escribir como combinación lineal de ellos. Para que dos vectores formen base basta que sean independientes, es decir, que tengan distinta dirección o lo que es igual que sus coordenadas no sean proporcionales.

5.3. Teorema de Thales



En dos triángulos semejantes los lados correspondientes son proporcionales

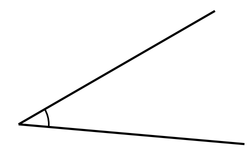
$$\frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'} = \frac{AB}{A'B'}$$

TRIGONOMETRIA

La trigonometría sirve para hallar distancias y ángulos a partir de otros ángulos y distancias conocidas.

5.4. Angulos. Medida de ángulos

Angulo es la sección de plano limitada por dos semirectas de origen común.
Arco circular es la porción de circunferencia limitada por dos puntos.
La medida de un ángulo se hace a partir del arco de circunferencia, con centro en el vértice, limitado por dos lados. Para medir arcos se emplean las medidas siguientes:



Grado sexagesimal: Dos diámetros perpendiculares determinan en la circunferencia cuatro arcos iguales llamados cuadrantes. Los ángulos correspondientes se llaman rectos. Por definición se dice que un ángulo recto mide 90^0.

1 ángulo recto $= 90^0$
1 grado $= 60'$
1 minuto $= 60''$

Radián: En una circunferencia de radio 1 el arco de longitud 1 se llama radián.
La circunferencia entera mide en radianes 2π.
Media circunferencia mide en radianes π.

Paso de grados a radianes: $\begin{array}{c} 180^0 - \pi \\ 30^0 - x \end{array} \quad x = \dfrac{30\pi}{180} = \dfrac{\pi}{6}, \quad 30^0 = \dfrac{\pi}{6}$

Ejemplo Calcular la longitud del arco de una circunferencia de radio 5 de 120 grados.
Longitud de la circunferencia $L = 2{,}3'1416{,}5 = 31'416$
Para la del arco hacemos una regla de tres:
$\begin{array}{ccc} 360^0 & -- & 31\text{'}416 \\ 120^0 & -- & x \end{array}$. Luego $x = \dfrac{31'416 \cdot 120}{360} = 10'47$

Medida relativa de ángulos: Llamaremos sentido positivo de medida de ángulos al contrario de las agujas del reloj y negativo al otro.

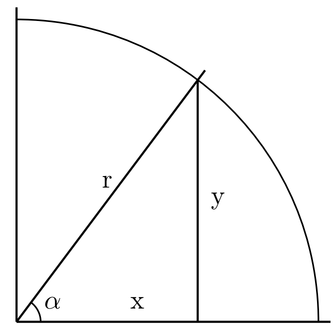
Arco generalizado: Hablaremos de arcos mayores o menores de una circunferencia apoyándonos en la idea de giro, así un arco de 800^0 es dar dos vueltas completas en sentido positivo y 80^0 más.

Arco reducido al primer giro de un arco generalizado es el arco menor que una vuelta pero con los mismos extremos:

arco reducido de $800^0 = 80^0$
arco reducido de $-800^0 = -80^0$ o también: 280^0

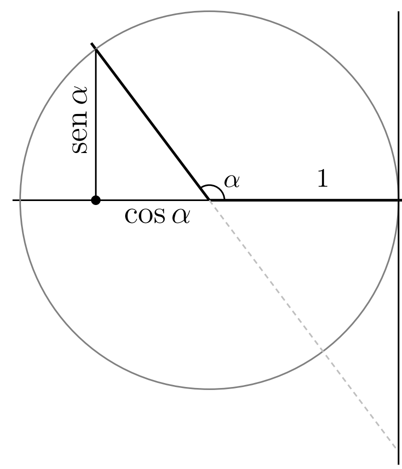
El arco reducido al primer giro de -490^0 es igual a -130^0 o 230^0. En la práctica no se acostumbra a usar arcos reducidos negativos de número mayor que 90.

5.5. Razones trigonométricas



Dado un ángulo, si lo situamos en unos ejes coordenados como se indica en la figura y pintamos una circunferencia cualquiera con centro en el origen, a partir de las coordenadas del punto donde el segundo lado del ángulo corta a la circunferencia definimos:

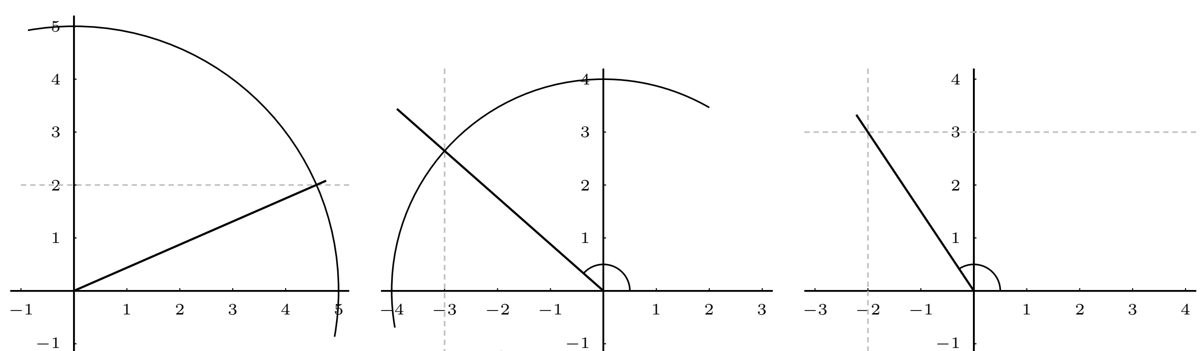
$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{y}{r},\ \cos\alpha = \frac{x}{r},\ \tan\alpha = \frac{y}{x}$$



Si astutamente tomamos la circunferencia con radio 1, queda que el seno es la ordenada y y el coseno la abcisa x del punto donde el segundo lado del ángulo corta a la circunferencia .

La tangente queda en la “recta de tangentes".

Ejemplo Construir los ángulos menores de 180^0 que tienen respectivamente: a) $\operatorname{sen} A = 2/5$; b) $\cos B = -3/4$; c) $\tan C = -3/2$

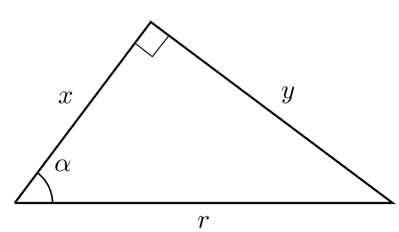


Para ángulos agudos (menores de 90^0) situados en un triángulo rectángulo, se tienen:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{y}{r} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{r} = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\tan\alpha = \frac{y}{x} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}}$$



5.6. Razones trigonométricas recíprocas

Son tres: cosecante, secante y cotangente.

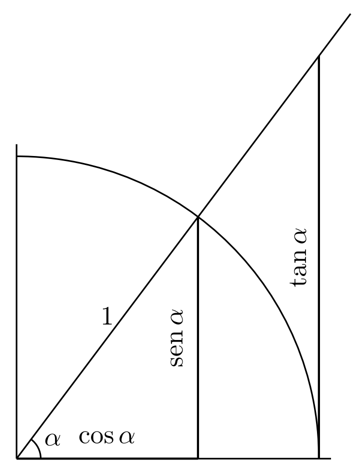
$$\csc\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}, \quad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}, \quad \cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}$$

5.7. Razones de ángulos notables

Radianes	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$
Grados	0^0	90^0	180^0	270^0	30^0	60^0	45^0
Seno	0	1	0	-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
Coseno	1	0	-1	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
Tangente	0	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	1

nota: es frecuente escribir $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

5.8. Relaciones fundamentales



A partir de la figura es inmediato

$\boxed{\tan\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}}$ $\boxed{\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$

dividiendo la igualdad anterior por $\cos^2\alpha$:

$\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}$ $\tan^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2}$ es decir:

$$\boxed{1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}}$$

Ejemplos:

1. Sabiendo que α no está en el 2^0 cuadrante y que $\cos\alpha = -1/3$, hallar las restantes razones trigonométricas de α .

   α es del 3^{er} cuadrante

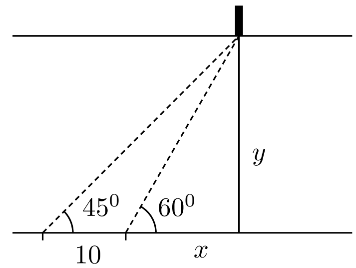
   $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1; \operatorname{sen}^2\alpha + 1/9 = 1; \operatorname{sen}\alpha = \pm\frac{\sqrt{8}}{3}$

   como α es del 3^{er} cuadrante tomamos el signo menos $\operatorname{sen}\alpha = -\frac{\sqrt{8}}{3}$, entonces $\tan\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = +\sqrt{8}$

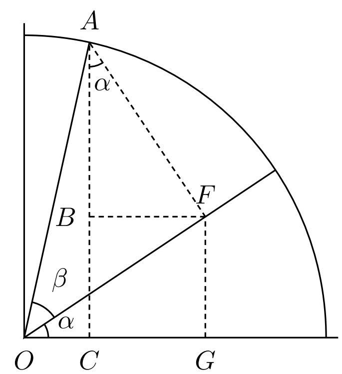
2. Hallar la anchura del río con los datos del dibujo.
(Es el llamado "método de la doble observación")

$$\begin{cases} \tan 45^0 = \frac{y}{10+x} \\ \tan 60^0 = \frac{y}{x} \end{cases} ; \begin{cases} 1 = \frac{y}{10+x} \\ \sqrt{3} = \frac{y}{x} \end{cases} \qquad x = \frac{y}{\sqrt{3}},$$

sustituyendo queda $10 + \frac{y}{\sqrt{3}} = y, \quad y = \frac{10}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}} = 23'6m$



5.9. Razones trigonométricas del ángulo suma de dos ángulos



Tenemos las siguientes fórmulas:

$\boxed{\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha.\cos\beta + \cos\alpha.\operatorname{sen}\beta}$

$\boxed{\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha.\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha.\operatorname{sen}\beta}$

$$\boxed{\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha.\tan\beta}}$$

Demostración:

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \overline{AC} = \overline{BC} + \overline{AB} = \left\{ \begin{array}{l} \overline{AB} = \cos\alpha.\overline{AF} = \cos\alpha.\operatorname{sen}\beta \\ \overline{BC} = \overline{FG} = \operatorname{sen}\alpha.\overline{OF} = \operatorname{sen}\alpha.\cos\beta \end{array} \right\}$$

$= \operatorname{sen}\alpha.\cos\beta + \cos\alpha.\operatorname{sen}\beta$

$$\cos(\alpha+\beta) = \overline{OC} = \overline{OG} - \overline{CG} = \left\{ \begin{array}{l} \overline{OG} = \cos\alpha.\overline{OF} = \cos\alpha.\cos\beta \\ \overline{CG} = \overline{BF} = \operatorname{sen}\alpha.\overline{AF} = \operatorname{sen}\alpha.\operatorname{sen}\beta \end{array} \right\}$$

$= \cos\alpha.\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha.\operatorname{sen}\beta$

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{sen}\alpha.\cos\beta + \cos\alpha.\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha.\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha.\operatorname{sen}\beta} = \begin{array}{l}\text{dividiendo numerador} \\ \text{y denominador} \\ \text{por } \cos\alpha.\cos\beta\end{array} = \frac{\frac{\operatorname{sen}\alpha.\cos\beta}{\cos\alpha.\cos\beta} + \frac{\cos\alpha.\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha.\cos\beta}}{\frac{\cos\alpha.\cos\beta}{\cos\alpha.\cos\beta} - \frac{\operatorname{sen}\alpha.\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha.\cos\beta}} = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha.\tan\beta}$$

5.10. Razones trigonométricas del ángulo resta de dos ángulos

Como podemos convertir la resta en suma: $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$ resulta:

$\boxed{\operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \operatorname{sen}\alpha.\cos\beta - \cos\alpha.\operatorname{sen}\beta}$

$\boxed{\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha.\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha.\operatorname{sen}\beta}$

$\boxed{\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha.\tan\beta}}$

5.11. Razones trigonométricas del ángulo doble

Como podemos poner $2.\alpha = \alpha + \alpha$ resulta a partir de las fórmulas del ángulo suma:
$\boxed{\operatorname{sen}(2\alpha) = 2\operatorname{sen}\alpha.\cos\alpha}$
$\boxed{\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha}$
$\boxed{\tan(2\alpha) = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}}$

Ejemplos

- Hallar las razones trigonométricas de 105^0 a partir de las de 60^0 y 45^0.

  $$\operatorname{sen}105^0 = \operatorname{sen}(60^0+45^0) = \operatorname{sen}60^0\cos 45^0 + \cos 60^0 \operatorname{sen}45^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

- Sabiendo que $\operatorname{sen}\alpha = 1/3$ con α en el 2^0 cuadrante y que $\cos\beta = -2/5$ con β en el 3^{er} cuadrante. Hallar $\tan(\alpha-\beta)$.

  Necesitamos las tangentes de α y β

  $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \quad \frac{1}{9} + \cos^2\alpha = 1$, resulta $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{8}}{3}$, luego $\tan\alpha = -\frac{1}{\sqrt{8}}$

  $1+\tan^2\beta = \frac{1}{\cos^2\beta}, \quad 1+\tan^2\beta = \frac{25}{4}$, luego $\tan\beta = \frac{\sqrt{21}}{2}$

  Por tanto sustituyendo en $\tan(\alpha-\beta)$, queda:

  $$\tan(\alpha-\beta) = \frac{-\frac{1}{\sqrt{8}} - \frac{\sqrt{21}}{2}}{1+(-\frac{1}{\sqrt{8}})\frac{\sqrt{21}}{2}} = \frac{-2-\sqrt{21}.\sqrt{8}}{2.\sqrt{8}-\sqrt{21}} = \frac{-18\sqrt{21}+50\sqrt{2}}{11}$$

5.12. Producto Escalar

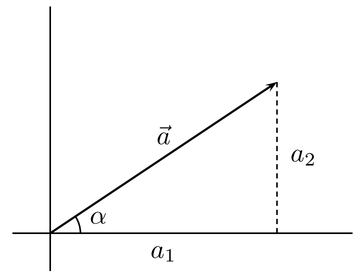
Dados dos vectores $\vec{a} = (a_1, a_2), \vec{b} = (b_1, b_2)$ de R^2 definimos producto escalar de esos dos vectores: $\boxed{\vec{a}.\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2}$ el resultado es pues un número: la suma de los productos de sus coordenadas.

Ejemplo Dados $\vec{a} = (2,-4)$ y $\vec{b} = (3,5)$ el producto escalar es: $\vec{a}.\vec{b} = (2,-4).(3,5) = 6-20 = -14$

Propiedades:
1) Distributiva $\vec{a}.(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c}$
2) Pseudoasociativa $(\alpha\vec{a}).\vec{b} = \alpha(\vec{a}.\vec{b}) = \vec{a}.(\alpha\vec{b})$
3) Conmutativa $\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}$
4) $\vec{a}.\vec{a} \geq 0$
5) $\vec{a}.\vec{a} = 0 \Longleftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$ para $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in R^2; \alpha \in R$
R^2 espacio vectorial con el producto escalar así definido se llama plano vectorial euclídeo.

5.13. Módulo de un vector

Dado un vector $\vec{a}=(a_1,a_2)\in R^2$ módulo de $\vec{a}$ es
$|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}.\vec{a}}=\sqrt{\vec{a}^2}=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$; es la longitud del vector:
$\boxed{|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2}}$



Ejemplo Dado $\vec{a}=(3,-7)$ el módulo es: $|\vec{a}|=\sqrt{3^2+7^2}=\sqrt{58}$
Observemos que

- $a_1=|\vec{a}|\cos\alpha$
- $a_2=|\vec{a}|\operatorname{sen}\alpha$

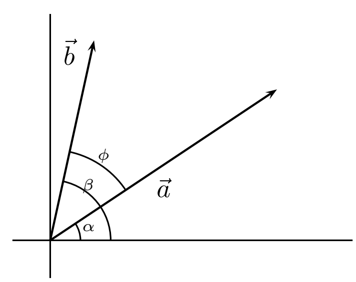
Un vector se dice **unitario** cuando su módulo es 1
$|\alpha\vec{a}|=|\alpha|.|\vec{a}|$ para todo $\vec{a}\in R^2, \alpha\in R$
nota: $|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}^2}$ está bien, $\vec{a}=\sqrt{\vec{a}^2}$ está mal, $|\vec{a}|^2=\vec{a}^2$ está bien.

5.14. Ángulo de dos vectores

Dados $\vec{a},\vec{b}$ dos vectores de R^2 no nulos se llama ángulo de esos dos vectores al ángulo ϕ formado por dos semirrectas que los contienen, se verifica:

$$\boxed{\cos\phi=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}}$$

Demostración
$\cos\phi=\cos(\beta-\alpha)=\cos\alpha.\cos\beta+\operatorname{sen}\alpha.\operatorname{sen}\beta$
$\left\{\begin{array}{l}\cos\alpha=a_1/|\vec{a}|;\operatorname{sen}\alpha=a_2/|\vec{a}|\\ \cos\beta=b_1/|\vec{b}|;\operatorname{sen}\beta=b_2/|\vec{b}|\end{array}\right.$,sustituyendo:
$\cos\phi=\dfrac{a_1b_1+a_2b_2}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}$



Ejemplo Hallar el ángulo que forman $\vec{a}=(1,2),\vec{b}=(-4,1)$
$$\cos\phi=\frac{1\cdot(-4)+2\cdot 1}{\sqrt{1+4}\cdot\sqrt{16+1}}=\frac{-2}{\sqrt{85}}=-0'21; ar\cos(-0'21)=102'12^0;\quad \text{ángulo}(\vec{a},\vec{b})=102'12^0$$

Consecuencias

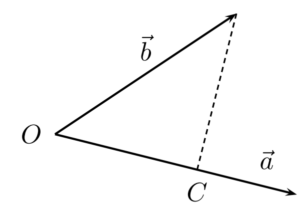
1. **Definición clásica de producto escalar** $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\phi$

   Ejemplo Dados dos vectores $\vec{x},\vec{y}$ tales que sus módulos valen 3 y forman un ángulo de 30^0, hallar $\vec{a}\cdot\vec{b}$ siendo $\vec{a}=3\vec{x}-2\vec{y},\vec{b}=5\vec{x}+3\vec{y}$.

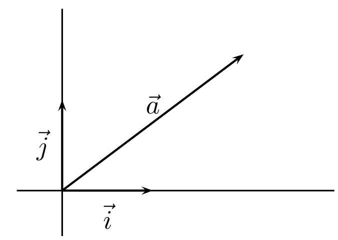
   $\vec{a}\cdot\vec{b}=(3\vec{x}-2\vec{y})(5\vec{x}+3\vec{y})=15\vec{x}^2-6\vec{y}^2-\vec{x}\cdot\vec{y}=15|\vec{x}|^2-6|\vec{y}|^2-|\vec{x}|\cdot|\vec{y}|\cos 30^0=15\cdot 9-6\cdot 9-9\cdot\cos 30^0=81-\frac{9\sqrt{3}}{2}$

2. Dos vectores son **ortogonales** (perpendiculares) si y solo si su producto escalar es 0.

3. Como $|\vec{b}|\cos\phi$ es la proyección $\bar{OC}$ del vector $\vec{b}$ sobre la dirección del $\vec{a}$ podemos decir que el producto escalar de dos vectores es igual al módulo de uno de ellos multiplicado por la proyección del otro sobre él.
   en efecto: $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\phi$; y se tiene: $\cos\phi = \frac{OC}{|\vec{b}|}$



4. **Base ortonormal** es toda base formada por vectores unitarios ortogonales.
   Por ejemplo la base canónica formada por
   $\vec{i} = (1,0), \vec{j} = (0,1)$
   Entonces dado un vector $\vec{v} = (v_1, v_2)$ se puede escribir:
   $\vec{v} = (v_1, v_2) = v_1\vec{i} + v_2\vec{j}$



5. Dado un vector $\vec{v}$, si lo dividimos por su módulo obtenemos un vector unitario de igual dirección y sentido: $\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$

6. Se cumplen las siguientes desigualdades: dados dos vectores $\vec{a}, \vec{b}$ de R^2

   1) $|\vec{a}.\vec{b}| \leq |\vec{a}||\vec{b}|$ desigualdad de Schwarz

   2) $|\vec{a}+\vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$ desigualdad de Minkowski

   Demostración (OPTATVO) 1) $|\vec{a}.\vec{b}| = ||\vec{a}||\vec{b}|.\cos(\vec{a},\vec{b})| \leq \{|coseno| \leq 1\} \leq |\vec{a}||\vec{b}|$

   2) Como $|\vec{a}+\vec{b}|$ y $|\vec{a}|+|\vec{b}|$ son números positivos, podemos comparar sus cuadrados, teniendo en cuenta que $|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v}^2}$ o sea $|\vec{v}|^2 = (\sqrt{\vec{v}^2})^2 = \vec{v}^2$; resulta:

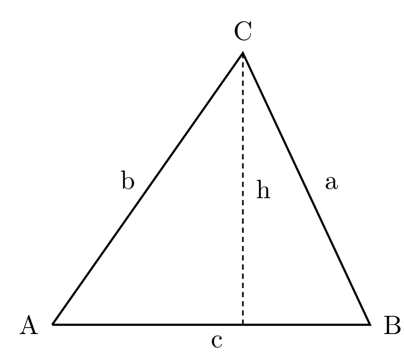
   $|\vec{a}+\vec{b}|^2 = (\vec{a}+\vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a}\vec{b} + |\vec{b}|^2 \leq |\vec{a}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}| + |\vec{b}|^2 = (|\vec{a}|+|\vec{b}|)^2$

Resolución de triángulos oblicuángulos

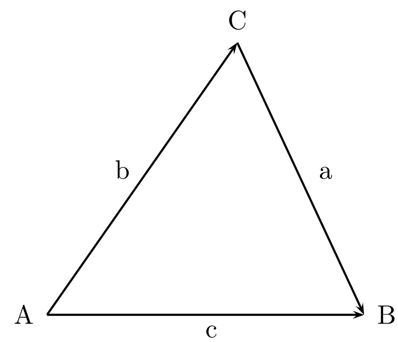
5.15. Teorema del seno

A partir de la figura $h = a.\operatorname{sen} B$
$h = b.\operatorname{sen} A$ luego $a.\operatorname{sen} B = b.\operatorname{sen} A$
queda $\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B}$
tomando otra altura se verificaría para c y C resulta:

$$\boxed{\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}}$$



5.16. Teorema del coseno



A partir de la figura se tiene la igualdad vectorial $\vec{a} = \vec{c} - \vec{b}$ igualando los módulos $|\vec{a}| = |\vec{c} - \vec{b}|, |\vec{a}|^2 = |\vec{c} - \vec{b}|^2 = (\vec{c} - \vec{b})(\vec{c} - \vec{b}) = \vec{c}^2 + \vec{b}^2 - 2\vec{c}\vec{b}$ llamando por comodidad $|\vec{a}| = a; |\vec{b}| = b; |\vec{c}| = c$, resulta entonces:

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A}$$

y análogamente $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B; c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

5.17. Resolución de triángulos oblicuángulos

Consiste en, dados algunos ángulos y lados, hallar los restantes. Se aplican las fórmulas anteriores teniendo en cuenta:

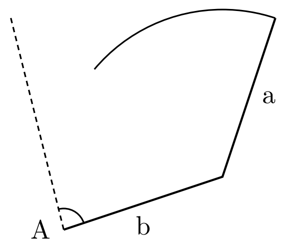
1) Los ángulos suman 180^0

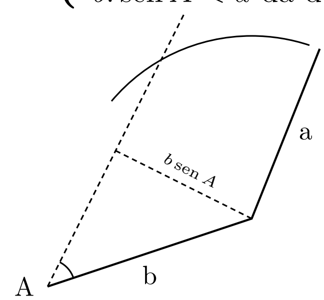
2) Un lado ha de ser menor que la suma de los otros dos.

3) En todos los casos existe solución y es única excepto en el caso en que dan dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos: el problema puede tener dos, una o ninguna solución:

datos a, b, A

$$A \geq 90^0 \begin{cases} a > b \text{ da una solución} \\ a \leq b \text{ ninguna solución } * \end{cases} \qquad A < 90^0 \begin{cases} a \geq b \text{ da una solución} \\ a < b \begin{cases} b.\operatorname{sen} A > a \text{ ninguna solución} \\ b.\operatorname{sen} A = a \text{ da una solución} \\ b.\operatorname{sen} A < a \text{ da dos soluciones } ** \end{cases} \end{cases}$$

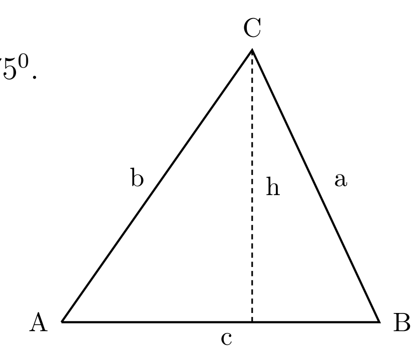




* pues a mayor lado se ha de oponer mayor ángulo

** se aplica el teorema del seno y se toman dos soluciones una menor que 90^0 y otra mayor que 90^0

Ejemplos



1. Resolver el triángulo con los datos: $a = 40, B = 45^0, C = 75^0$. Hallar también el área.

   $A = 180 - (B + C) = 60^0$

   $\dfrac{a}{\operatorname{sen} A} = \dfrac{b}{\operatorname{sen} B}; b = \dfrac{40\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \approx 32'6$

   $\dfrac{a}{\operatorname{sen} A} = \dfrac{c}{\operatorname{sen} C}; c \approx \dfrac{40 \cdot 0'96}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \approx 44'6$

   $S = \dfrac{c \cdot h}{2} = \dfrac{c \cdot a \cdot \operatorname{sen} B}{2} \approx 630'94u^2$

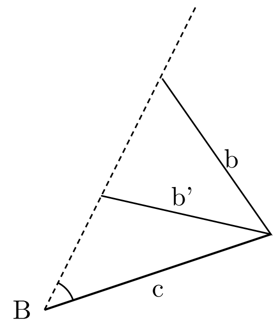
2. Id. a = 3, b = 5, c = 9

   imposible no es triángulo (al aplicar el teorema del coseno resulta un valor de $\cos A$ mayor que uno)

3. Hallar A sabiendo que a = 3, b = 5, c = 6

   $a^2 = c^2 + b^2 - 2bc \cos A,$

$9 = 25 + 36 - 60 \cdot \cos A, \quad \cos A = \frac{52}{60}; \quad A \approx 29'92^0$



4. Hallar C sabiendo que b = 9, c = 10, B = 40^0
   $\dfrac{b}{\operatorname{sen} B} = \dfrac{c}{\operatorname{sen} C};$
   $\operatorname{sen} C \approx \dfrac{10 \cdot 0'64}{9} \approx 0'71, \quad \begin{cases} C \approx 45'57^0 \\ C' \approx 180 - 45'47^0 = 134'43^0 \end{cases}$
5. Hallar A sabiendo que a= 8, b = 3, B = 30^0
   $\dfrac{a}{\operatorname{sen} A} = \dfrac{b}{\operatorname{sen} B}; \quad \operatorname{sen} A = \dfrac{a \cdot \operatorname{sen} B}{b} = \dfrac{8 \cdot 0'5}{3} = \dfrac{4}{3}$, no hay solución
6. Hallar el ángulo B en le triángulo de vértices $A(3,2), B(4,5), C(-1,3)$.

   Se halla por vectores:

   $\vec{BA} = (3-4, 2-5) = (-1,-3)$

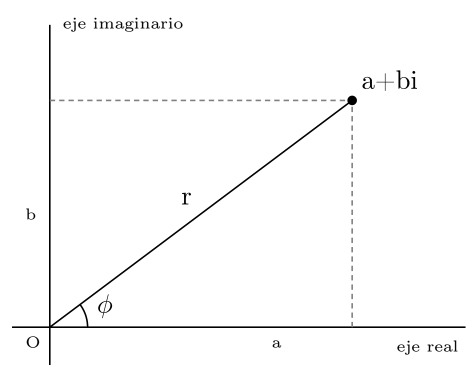
   $\vec{BC} = (-1-4, 3-5) = (-5,-2)$

   $\cos B = \dfrac{\vec{BC}.\vec{BA}}{|\vec{BC}|.|\vec{BA}|} = \dfrac{(-1)(-5)+(-3)(-2)}{\sqrt{1+9}.\sqrt{25+4}} = \dfrac{11}{\sqrt{290}} \approx 0'6459; ar\cos(0'6459) \approx 49'76^0$

   $B \approx 49'76^0$

5.18. Forma polar de un número complejo

Forma binómica: $\boxed{z = a + bi}$
Vimos que los números complejos se representan en dos ejes en el plano:
Ejemplos: z = 4+3i ; z' = -7i.

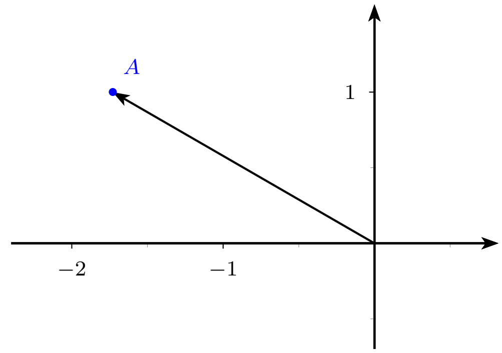


El punto A que lo representa se llama afijo del número complejo z .
$r = \sqrt{a^2 + b^2}$ se llama **módulo** de z
el ángulo ϕ que forma con el semieje real positivo se llama **argumento** de z se calcula:
$\phi \quad : \tan\phi = \dfrac{b}{a}$ y se escoge cuadrante, para ello se representa gráficamente.
Forma polar: $\boxed{z = (r, \phi)}$
Forma trigonométrica: $\boxed{z = r(\cos\phi + i.\operatorname{sen}\phi)}$. Es la forma de paso de un número complejo en forma polar a forma binómica.
nota: el cero: $0 = 0 + 0i$ no tiene argumento

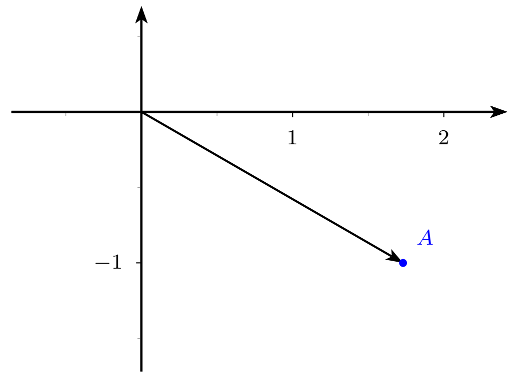
Ejemplos

1. Representar el afijo y expresar en forma polar: $z_1 = -\sqrt{3} + i$

Módulo $r_1 = 2$
Argumento ϕ_1 : está en el 2^0 cuadrante, $\tan\phi_1 = \frac{+1}{-\sqrt{3}}$, $\phi_1 = 180 - 30 = 150^0$
$z_1 = (2, 150^0)$

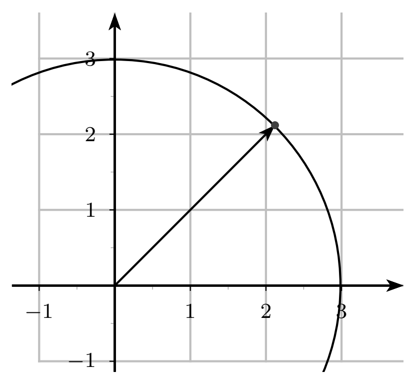


2. Representar el afijo y expresar en forma polar: $z_2 = \sqrt{3} - i$



Módulo $r_2 = 2$
Argumento ϕ_2 : está en el 4^0 cuadrante, $\tan\phi_2 = \frac{-1}{+\sqrt{3}}$; $\phi_2 = -30^0$;
$z_2 = (2, -30^0) = (2, 330^0)$

3. Representar el afijo y expresar en forma binómica: $z_3 = (3, \pi/4)$;



efectuando en la forma trigonométrica se obtiene la forma binómica:
$z_3 = 3(\cos\frac{\pi}{4} + i.\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}) = 3(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}i$

5.18.1. Operaciones en forma polar

Producto en forma polar Se multiplican los módulos y se suman los argumentos.

$\boxed{(r,\alpha).(s,\beta) = (r.s, \alpha+\beta)}$

Demostración:

$(r,\alpha).(s,\beta) = [r(\cos\alpha + i.\operatorname{sen}\alpha)].[s(\cos\beta + i.\operatorname{sen}\beta)] == r.s(\cos\alpha.\cos\beta + i^2.\operatorname{sen}\alpha.\operatorname{sen}\beta + i.\operatorname{sen}\alpha.\cos\beta + i.\cos\alpha.\operatorname{sen}\beta) = r.s[\cos(\alpha+\beta) + i.\operatorname{sen}(\alpha+\beta)] = (r.s, \alpha+\beta)$

Cociente en forma polar Se dividen los módulos y se restan los argumentos.

$\boxed{\frac{(r,\alpha)}{(s,\beta)} = (\frac{r}{s}, \alpha-\beta)}$

Demostración:

$$\frac{(r,\alpha)}{(s,\beta)}=\frac{r(\cos\alpha+i.\operatorname{sen}\alpha)}{s(\cos\beta+i.\operatorname{sen}\beta)}=\frac{r}{s}.\frac{(\cos\alpha+i.\operatorname{sen}\alpha)(\cos\beta-i.\operatorname{sen}\beta)}{(\cos\beta+i.\operatorname{sen}\beta)(\cos\beta-i.\operatorname{sen}\beta)}=$$

$$=\frac{r}{s}.\frac{\cos\alpha.\cos\beta-i^2.\operatorname{sen}\alpha.\operatorname{sen}\beta+i(\operatorname{sen}\alpha.\cos\beta-\cos\alpha.\operatorname{sen}\beta)}{\cos^2\beta-i^2.\operatorname{sen}^2\beta}=\frac{r}{s}.[\cos(\alpha-\beta)+i.\operatorname{sen}(\alpha-\beta)]$$

Potencia en forma polar Fórmula de Moivre: $\boxed{(r,\alpha)^n=(r^n,n.\alpha);\quad n\in Z}$

Ejemplo Hallar la potencia anterior $(1-i)^4$ en forma polar:

$1-i=(\sqrt{2},-45^0)$

$(1-i)^4=(\sqrt{2},-45^0)^4=(\sqrt{2}^4,4.(-45)^0)=(4,-180^0)=-4$

5.19. Problemas

1. Calcular t para que los vectores $\vec{a}$ = (3,2), $\vec{b}$ = (1,t) sean paralelos.

   Solución: $t = 2/3$

2. Hallar las coordenadas del punto D para que el polígono ABCD sea un paralelogramo, sabiendo que A(3,1), B(4,7), C(6,2).

   Solución: $\vec{AB} = \vec{DC}, D(5, -4)$

3. Dado el vector de coordenadas (5,9) hallar analítica y gráficamente su expresión en la base (2,3), (1,2).

   Solución: $\alpha = 1, \beta = 3$

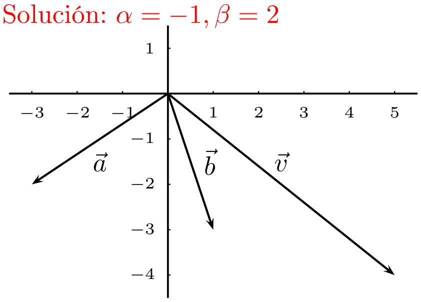
4. Dado el vector de coordenadas (3,2) hallar analíticamente su expresión en la base (2,1), (1,-2).

   Solución: $\alpha = 8/5, \beta = -1/5$

5. Dado el vector de coordenadas (12,-6) hallar analíticamente su expresión en la base (3,2), (-2,3).

6. Dado el vector $\vec{v}$ hallar analítica y gráficamente su expresión en la base formada por $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

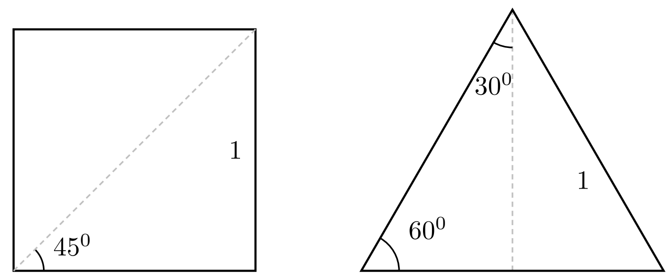
   Solución: $\alpha = -1, \beta = 2$



7. Construir los ángulos correspondientes: a) $\operatorname{sen} A = 3/4$; b) $\cos B = 6/7$; c) $\tan C = 3$

8. Construir los ángulos correspondientes: a) $\operatorname{sen} A = -3/5$; b) $\cos B = 1/2$; c) $\tan C = -3/7$

9. A partir de la figura hallar sen, cos, tan de los siguientes ángulos: a) 45^0, b) 30^0, c) 60^0



10. Hallar sin funciones trigonométricas de la calculadora, a partir de las razones trigonométricas de los ángulos notables, todas las razones trigonométricas: a) de 450^0; b) $4\pi/3$; c) $3\pi/4$

11. Hallar sin funciones trigonométricas de la calculadora, a partir de las razones trigonométricas de los ángulos notables, todas las razones trigonométricas: a) de $\dfrac{7\pi}{4}$; b) $\dfrac{5\pi}{2}$; c) $\dfrac{13\pi}{4}$; d) $\dfrac{-4\pi}{6}$; e) 9π

12. Hallar los ángulos entre 0^0 y 360^0 que tienen: a) seno $= 1/\sqrt{2}$; b) tangente $= \sqrt{3}$; c) coseno $= \sqrt{3}/2$

    Solución: a) $45^0, 135^0$, b) $60^0, 240^0$, c) $30^0, 330^0$

13. Hallar las restantes razones trigonométricas:

    a) seno A $= 1/\sqrt{2}$, $\quad A \in 2^0$ cuadrante;

    b) tangente B$=\sqrt{3}$, $\quad B \in 3^0$ cuadrante;

    c) coseno C$= \sqrt{3}/2$, $\quad C \in 4^0$ cuadrante

14. Hallar las restantes razones trigonométricas:

a) seno A $= -1/\sqrt{3}$, $\quad A \in 3^0$ cuadrante;

b) coseno B$=\frac{-1}{3}$, $\quad B \in 2^0$ cuadrante;

c) tangente C$= -\sqrt{2}$, $\quad C \in 4^0$ cuadrante.

15. Hallar el valor a partir de las razones trigonométricas de los ángulos notables:

$$\frac{\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2} - \operatorname{sen}\frac{5\pi}{4} + \tan\frac{-\pi}{4} - \tan\frac{4\pi}{3}}{\cos\frac{7\pi}{4} + \operatorname{sen}\frac{5\pi}{6} - \cos\frac{-\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{2}}$$

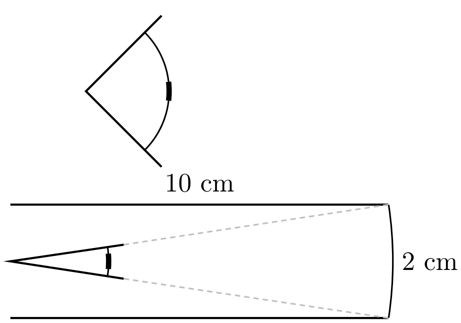
Solución: $-2\sqrt{2} - \sqrt{6} + 1$

16. Sabiendo que $\tan A = -2/3$ y que $A \in [-\pi/2, \pi/2]$, hallar las demás razones trigonométricas.

Solución: $\operatorname{sen} A = -2/\sqrt{13}, \cos A = 3/\sqrt{13}, \tan A = -2/3$

17. La amplitud de visión del ojo es de 89^0. ¿ Cuál es la amplitud de miras del que ve la vida por un canuto de 2 cm de diámetro y 10 cm de largo?.

Solución: $11'4^0$



18. Desde un cierto lugar del suelo se ve el punto más alto del pararrayos de un edificio formando un ángulo de 45^0 con la horizontal. Si nos acercamos 4 m el ángulo pasa a ser de 60^0. Calcular la altura del extremo del pararrayos.

Solución: 9'46 m

19. A partir de las razones trigonométricas de los ángulos notables, hallar las razones trigonométricas de a) 75^0; b) 105^0; c) -15^0.

Solución: a) $\operatorname{sen} 75^0 = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}, \cos 75^0 = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}, \tan 75^0 = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} = 2+\sqrt{3}$, b) $\operatorname{sen} 105^0 = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}, \cos 105^0 = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}, \tan 105^0 = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{\sqrt{2}-\sqrt{6}}$, c) $\operatorname{sen}(-15^0) = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, \cos(-15^0) = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, \tan(-15^0) = \frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$

20. Calcular

$$\frac{\operatorname{sen}(\pi/3 - \pi/4) + \cos(3\pi/2 - \pi/3)}{\tan(\pi/4 + \pi/3)}$$

Solución: $\dfrac{2\sqrt{3} - 4 + 3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2\sqrt{2} - 2\sqrt{6}} = \dfrac{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}}$

21. Sabiendo que α y β son ángulos menores que $\pi/2$ y que $\tan\alpha = 4$ y $\tan\beta = 8$. Calcular $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)$, $\cos(\alpha-\beta)$.

Solución: $\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \frac{12}{\sqrt{1105}}, \cos(\alpha-\beta) = \frac{33}{\sqrt{1105}}$

22. Sabiendo que α está en el segundo cuadrante y que $\operatorname{sen}\alpha = \frac{3}{5}$. Calcular $\tan 2\alpha$.

Solución: $-24/7$

23. Sean $\vec{a}$, $\vec{b}$ tales que $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 7$, $\vec{a}.\vec{b} = 5$. Calcular $(\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}-2\vec{b})$.

Solución: -54

24. Sea $B = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}$ una base de V^2 tal que $|\vec{e_1}| = |\vec{e_2}| = 3$ y $\cos(\vec{e_1}, \vec{e_2}) = 0$. Siendo $\vec{a} = 3\vec{e_1} - 6\vec{e_2}$, $\vec{b} = 8\vec{e_1} - \vec{e_2}$. Calcular $\vec{a}^2 - \vec{a}.\vec{b}$.

Solución: 135

25. Escribir tres vectores ortogonales al vector de coordenadas $(8, -7)$. ¿Cómo son estos tres vectores entre sí?. ¿Qué relación tienen sus coordenadas?.

26. Sea $B = \{\vec{u_1}, \vec{u_2}\}$ una base ortonormal. Demostrar que los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ definidos por $\vec{a} = \vec{u_1}/\sqrt{10} + 3\vec{u_2}/\sqrt{10}$, $\vec{b} = -3\vec{u_1}/\sqrt{10} + \vec{u_2}/\sqrt{10}$, constituyen una base ortonormal.

27. Sea $B = \{\vec{u_1}, \vec{u_2}\}$ una base ortonormal de V^2. Siendo $\vec{a} = 3\vec{u_1} + 4\vec{u_2}$, $\vec{b} = 2\vec{u_1} - \vec{u_2}$. Calcular $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$ y $\cos(\vec{a}, \vec{b})$.

    Solución: $|\vec{a}| = 5, |\vec{b}| = \sqrt{5}, \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{2}{5\sqrt{5}}$; $79^0 48'$

28. Un vector tiene módulo 5 y forma con el eje horizontal positivo un ángulo de 53^0 6'. Pintar el vector y hallar sus coordenadas.

    Solución: $(3, 4)$

29. Sea $B = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}\}$ una base tal que $|\vec{v_1}| = |\vec{v_2}| = 2$ y $\vec{v_1}.\vec{v_2} = 3$. Hallar el ángulo que forman los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ definidos por $\vec{a} = \vec{v_1} - 3\vec{v_2}$, $\vec{b} = -2\vec{v_1} + \vec{u_2}$.

    Solución: $85'677^0$

30. Dados los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ que forman un ángulo de 81^0 y tales que $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 3$. Hallar el módulo del vector: $\vec{v} = 6\vec{a} - 5\vec{b}$

    Solución: $25'55$

31. Resolver el triángulo y hallar el área, b = 8, c = 5, A = 60^0.

    Solución: $a = 7, S = 10\sqrt{3}$ u^2

(los siguientes son problemas de resolución de triángulos)

32. Resolver el triángulo, a = 17, B = 48^0, C = 52^0.

    Solución: $b = 12'82, c = 13'6$

33. Resolver el triángulo, a = 6, b = 8, A = 40^0.

    Solución: $B = 58'98^0, C = 81'01, c = 9'21$; $B' = 121'01^0, C' = 18'9^0, c' = 3'04$

34. Hallar el ángulo A en el triángulo de vértices A(3,1), B(2,4), C(-1,-2).

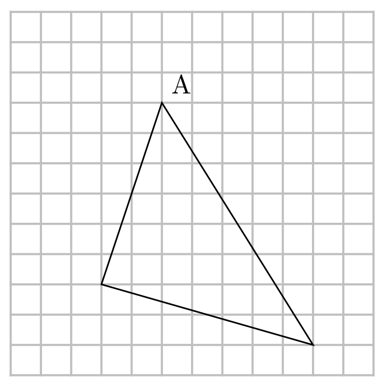
    Solución: $A = ar\cos\frac{-5}{\sqrt{250}} = 108'4^0$

35. Un controlador aéreo observa en la pantalla a dos aviones A y B que distan respectivamente 6 y 10 km del aeropuerto.

    Si desde la torre de control se pueden observar con un ángulo de 42^0. ¿Que distancia hay entre los dos aparatos?

    Solución: $6'84$ km

36. Hallar el ángulo A en el triángulo



    Solución: $50, 4^0$

37. Hallar el ángulo que forman en un cubo, la diagonal de una cara y la diagonal del cubo

    Solución: $34'99^0$

38. Representar los afijos y expresar en forma binómica o polar a) $\sqrt{3} + 3i$. b) $(2, 120^0)$

    Solución: a) $(2\sqrt{3}, 60^0)$, b) $-1 + \sqrt{3}i$

39. Pasar a forma polar a) $-3+4i$; b) $-\sqrt{3}-3i$

    Solución: a) $(5, 126'86^0)$, b) $(2\sqrt{3}, 240^0)$

40. Pasar a forma binómica a) $(3, \frac{20\pi}{3}$, b) $(\sqrt{7}, \frac{7\pi}{6})$

    Solución: a) $\frac{-3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$, b) $\frac{-\sqrt{21}}{2} - \frac{-\sqrt{7}}{2}i$

41. Descomponer y hallar las raíces: a) $f(x) = x^2 - 8x + 8$, b) $g(x) = x^3 - x^2 + x$

    I) En los reales.

    II) En los complejos.

    Solución: I) a) raíces: $x = 4 \pm 2\sqrt{2}$; $f(x) = \left(x - (4 - 2\sqrt{2})\right)\left(x - (4 + 2\sqrt{2})\right)$

    b) raíces: $x = 0$; $g(x) = x(x^2 - x + 1)$

    II) a) Igual

    b) raíces: $x = 0; x = \dfrac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$;

    $$g(x) = x\left(x - \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}\right)\left(x - \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right)$$

42. Pasar a forma polar: a) $3 - 2i$, b) $-\sqrt{5} - i$

43. Pasar a forma binómica: a) $(4, 60^0)$, b) $(5, -85^0)$

44. Efectuar pasando primero a forma polar si interesa:

    a) $(-2 + 2i)^4$. b) $(\sqrt{3} - i)^3$. c) i^3.

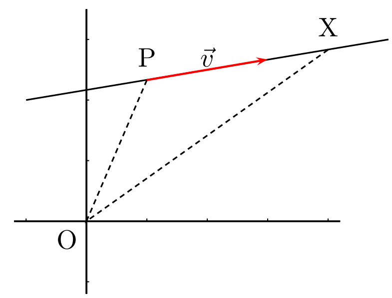
    Solución: a) -64, b) $-8i$, c) $-i$

45. Efectuar dando el resultado en forma binómica: $(3 - 4i)^5$.

Capítulo 6

GEOMETRÍA

6.1. Ecuaciones de la recta



Sea la recta que pasa por el punto P y tiene la dirección del vector $\vec{v}$.
Sea X un punto cualquiera de la recta.
Se verifica $\vec{OX} = \vec{OP} + \vec{PX}$, como $\vec{PX}$ tiene igual dirección que $\vec{v}$ se tiene que, $\vec{PX} = t\vec{v}$ por tanto $\vec{x} = \vec{p} + t\vec{v}, t \in R$
Pasando a coordenadas si $P(x_0, y_0), \vec{v} = (v_1, v_2)$ y suponemos que $X(x, y)$ se tiene:
$\boxed{r : (x, y) = (x_0, y_0) + t(v_1, v_2), t \in R}$ **ec. vectorial de la recta**

Ejemplo La recta que pasa por $P(1, -3)$, y tiene vector dirección $\vec{v} = (2, 1)$ es:
$(x, y) = (1, -3) + t(2, 1), t \in R$

Si queremos comprobar si el punto $Q(-3, -1)$ pertenece a la recta se comprueba que el vector $\vec{PQ}$ es proporcional al $\vec{v}$: Efectivamente $\vec{PQ} = (-3 - 1, -1 + 3) = (-4, 2)$ es proporcional a $\vec{v} = (2, 1)$

Separando coordenadas en la ecuación vectorial: $\boxed{r : \begin{cases} x = x_0 + tv_1 \\ y = y_0 + tv_2 \end{cases}, t \in R}$
ecuaciones paramétricas de la recta

Ejemplo $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -3 + t \end{cases}, t \in R$

Eliminando t entre las dos ecuaciones (despejando t) se tiene $\boxed{r : \dfrac{x - x_0}{v_1} = \dfrac{y - y_0}{v_2}}$, **ecuación continua de la recta**

Ejemplo $\dfrac{x - 1}{0} = \dfrac{y + 2}{-2}$ (se admite la notación simbólica ”partido por 0” en este contexto)

Quitando denominadores llegamos a expresiones del tipo $v_2x - v_1y + C = 0$ es decir es de la forma:

$\boxed{r : Ax + By + C = 0}$, **ecuación general de la recta**. Se caracteriza por que el segundo miembro es 0 Despejando y: $y = \dfrac{v_2}{v_1}x + n$ es decir es de la forma: $\boxed{y = mx + n}$, **ecuación explícita**. Se caracteriza por estar despejada la y.

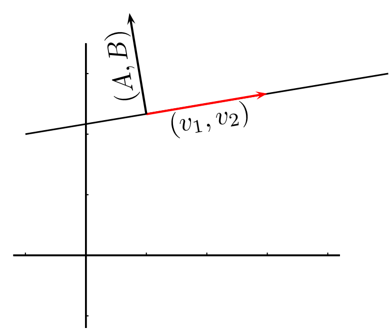
Ejemplo La recta $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+2}{-2}$, se puede expresar $-2(x-1) = 3(y+2); y = -\dfrac{2}{3}x - \dfrac{4}{3}$ explícita; o también $2x + 3y + 4 = 0$ general

6.2. Observaciones

1. En las ecuaciones en forma vectorial, paramétricas, y continua de la recta aparecen directamente un punto y un vector dirección de la recta.

   Ejemplo $x = 1$ ec. general $\iff \begin{cases} x = 1 \\ y = y \end{cases}$ paramétricas; punto (1,0); vector dirección (0,1)

2. Con x e y en el mismo miembro, por ejemplo en la ecuación general $Ax+By+C = 0$, teníamos que $A = v_2, B = -v_1$, entonces si hacemos el producto escalar entre los vectores (v_1, v_2) y (A, B) resulta $(v_1, v_2).(A, B) = (v_1, v_2).(v_2, -v_1) = 0$ luego $(v_1, v_2) \perp (A, B)$ por tanto (A, B) es **vector ortogonal** a la recta y podemos decir: con x e y en el mismo miembro, para obtener un vector dirección de la recta basta tomar esos coeficientes, intercambiarlos y cambiar el signo a uno de ellos.



   Ejemplos

   a) Hallar las ecuaciones paramétricas de la recta $2x + 3y - 2 = 0$

   necesitamos un punto y un vector dirección;

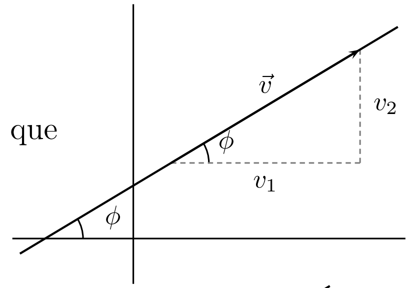
   punto: para $y = 0$ resulta $x = 1$; punto $(1, 0)$
   vector ort.: $(2, 3) \Longrightarrow (3, -2)$; vector dir.: $(3, -2)$ $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -2t \end{cases}$

   b) Hallar la ecuación de la recta paralela a $2x - 3y = 7$ que pasa por el punto $(0, 4)$.

   Si es paralela sirve el mismo vector ortogonal por tanto los coeficientes de x, y pueden ser los mismos $2x - 3y + C = 0$

   Haciendo que pase por el punto $-3 \cdot 4 + C = 0; C = 12$, luego la recta buscada es $2x - 3y + 12 = 0$.

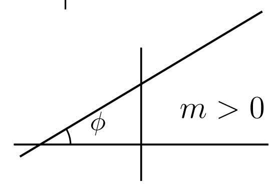
3. En la ecuación explícita $y = mx + n$ por lo anterior $(1, m)$ es vector dirección



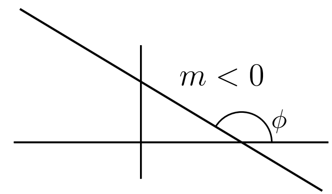
$$m = \frac{v_2}{v_1} = \tan\phi$$

m se llama pendiente de la recta, es la tangente del ángulo que forma la recta con las "x positivas".

m es el coeficiente de x cuando y está despejada
n es la ordenada en el origen.



Por tanto según que la pendiente sea positiva o negativa la recta es creciente o decreciente.



Por otro lado se tiene que n es la ordenada en el origen.

4. La pendientes de dos rectas paralelas son iguales

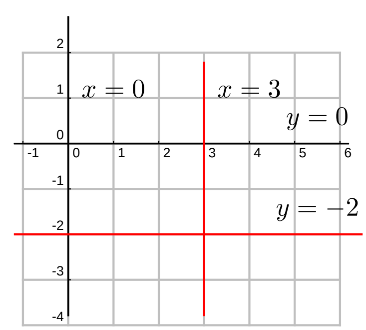
5. Las pendientes de dos rectas perpendiculares son inversas de distinto signo. $m, m' = \dfrac{-1}{m}$

Ejemplo: Dos rectas de pendientes respectivas $m = \dfrac{3}{5}, \quad m' = \dfrac{-5}{3}$ son perpendiculares.

6. Para pasar de las ecuaciones en que aparece punto y vector a las otras basta conseguir lo que la caracteriza por ejemplo en la general que todo esté en el primer miembro

Para pasar de de la ec general a una ecuación en la que aparece punto y vector se halla punto y vector, ejemplo anterior.

7. Rectas paralelas a los ejes



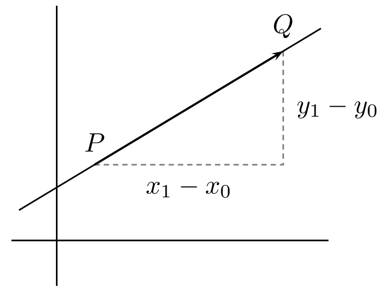
$x = 3 \quad \begin{cases} \text{punto } (3, 0); \\ \text{vector } (0, 1) \end{cases}$

$y = -2 \quad \begin{cases} \text{punto } (0, -2); \\ \text{vector } (1, 0) \end{cases}$

$x = 0 \quad \begin{cases} \text{punto } (0, 0); \\ \text{vector } (0, 1) \end{cases}$ es el eje de ordenadas.

8. Otras ecuaciones:

   Recta que pasa por dos puntos: $P(x_0, y_0), Q(x_1, y_1)$, consideramos el vector $\vec{PQ} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0)$ vector dirección, resulta:



$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}$$

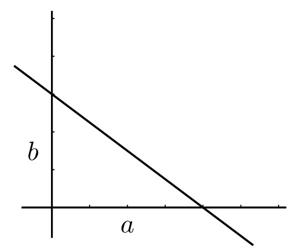
   despejando $y - y_0$, queda $y - y_0 = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0), \quad m = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$

   $\boxed{y - y_0 = m(x - x_0)}$ **ecuación punto pendiente**

   Ejemplo Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(5, -7)$ y forma un ángulo de 150^0 con el eje de las abcisas positivas:

   $y + 7 = \tan 150^0(x - 5); \quad y + 7 = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}(x - 5)$

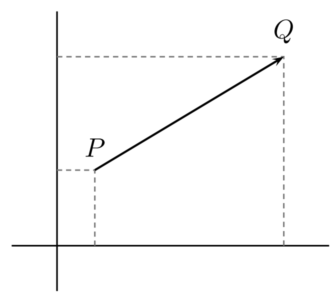
   Ecuación segmentaria: A partir de la ecuación general $Ax+By+C = 0$ pasando C al segundo miembro $Ax + By = -C$ dejando 1 en el 2^0 miembro



   $\dfrac{Ax}{-C} + \dfrac{By}{-C} = 1, \quad \dfrac{x}{-C/A} + \dfrac{y}{-C/B} = 1$ que es de la forma

   $\boxed{\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1}$ **ecuación segmentaria**, a es la abcisa en el origen, b es la ordenada en el origen

6.3. Distancia entre dos puntos



Es el módulo del vector $\vec{PQ}$, $\quad d(PQ) = |\vec{PQ}|$. Si las coordenadas son $P(x_0, y_0), Q(x_1, y_1)$

$$\boxed{d(PQ) = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}}$$

Mediatriz de un segmento es la recta cuyos puntos equidistan de los extremos del segmento. O también: mediatriz de un segmento es la recta perpendicular por el punto medio.

Ejemplo Hallar la mediatriz del segmento de extremos $A(-2, -1), B(1, 3)$

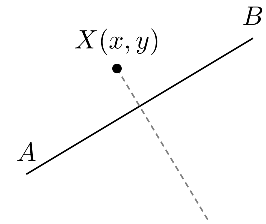
Método I: recta perpendicular por el punto medio.

El punto medio es $M = \left(\dfrac{-2+1}{2}, \dfrac{-1+3}{2}\right) = (\dfrac{-1}{2}, 1)$

El vector $\vec{AB} = (1 + 2, 3 + 1) = (3, 4)$ es perpendicular a la mediatriz por tanto la ecuación general de la mediatriz es: $3x + 4y + C = 0$.

Haciendo que pase por M tenemos: $3 \cdot \dfrac{-1}{2} + 4 \cdot 1 + C = 0$ resolviendo $C = -\dfrac{5}{2}$

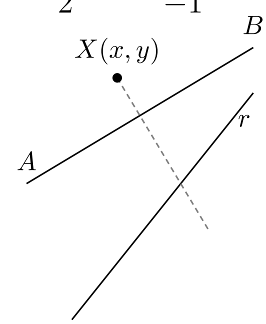
La mediatriz es $3x + 4y - \dfrac{5}{2} = 0$.



Método II: puntos que equidistan de los dos extremos.
Sea $X(x, y)$ un punto de la recta mediatriz, cumple que $d(X, A) = d(X, B)$ se tendrá que:
$\sqrt{(x+2)^2 + (y+1)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2}$
simplificando: $4x + 2y + 5 = -2x - 6y + 10$

$6x + 8y - 5 = 0$ es la mediatriz.

Ejemplo Dados los puntos $A(2, 3), B(0, 2)$. Hallar el punto de la recta $r : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{-1}$ que equidista de los puntos dados.



Sea $X(x, y)$ un punto de la recta mediatriz, cumple que $d(X, A) = d(X, B)$ se tendrá que: $\sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{x^2 + (y-2)^2}$
simplificando: $4x + 2y - 9 = 0$ es la mediatriz.

Resolviendo el sistema formado por la mediatriz y la recta dada:
$\left\{ \begin{array}{l} 4x + 2y - 9 = 0 \\ x + 2y - 1 = 0 \end{array} \right.$, queda: $(8/3, -5/6)$
Otro método:

Escribimos la recta en paramétricas: $\left\{ \begin{array}{l} x = 1 + 2t \\ y = -t \end{array} \right.$ luego los puntos de r son de la forma $(1 + 2t, -t)$

Buscamos que la distancia de uno de esos punto a A y B sea la misma:
$(1 + 2t - 2)^2 + (-t - 3)^2 = (1 + 2t)^2 + (-t - 2)^2$
$5t^2 + 2t + 10 = 5t^2 + 8t + 5$
$-6t = -5; \quad t = \frac{5}{6}$
sustituyendo en las ecuaciones paramétricas: $\left\{ \begin{array}{l} x = 1 + 2\frac{5}{6} = \frac{8}{3} \\ y = -\frac{5}{6} \end{array} \right.$ el punto es $\left(\dfrac{8}{3}, -\dfrac{5}{6} \right)$

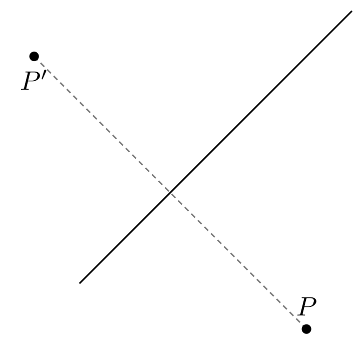
6.4. Punto medio de un segmento

Dados los puntos $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$ sea $M(x_m, y_m)$ el punto medio se tiene $\vec{PQ} = 2\vec{PM}$ en consecuencia: $\begin{array}{l} x_2 - x_1 = 2(x_m - x_1) \\ y_2 - y_1 = 2(y_m - y_1) \end{array}$

$\boxed{x_m = \dfrac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_m = \dfrac{y_1 + y_2}{2}}$ Luego el punto medio tiene de coordenadas la semisuma de coordenadas.

Ejemplo Hallar el simétrico del punto $P(3,5)$ respecto a la recta $x+2y+4=0$

Primero hallamos la recta perpendicular por el punto P
$2x-y+C=0$, hacemos que pase por $P(3,5)$: $2\cdot 3-5+C=0$
luego $C=-1$ recta $\perp$: $2x-y-1=0$



Ahora hallamos el punto de corte entre las dos rectas:

$$\begin{cases} x+2y+4=0 \\ 2x-y-1=0 \end{cases} \qquad x=-\frac{2}{5}, y=-\frac{9}{5}$$

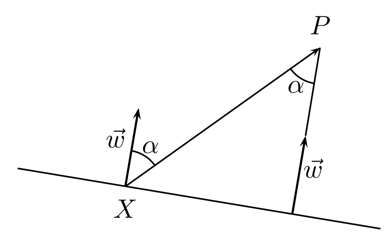
Sea $P'(x,y)$ el simétrico que buscamos, el punto anterior es el punto medio del segmento PP'

$-\frac{2}{5}=\frac{x+3}{2}, \quad -\frac{9}{5}=\frac{y+5}{2}$ luego resulta: $P'(-\frac{19}{5},-\frac{43}{5})$

6.5. Distancia de un punto a una recta

Dados la recta $r: Ax+By+C=0$ y el punto $P(x_0,y_0)$ se tiene:

$$\boxed{d(P,r)=\left|\frac{Ax_0+By_0+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|}$$



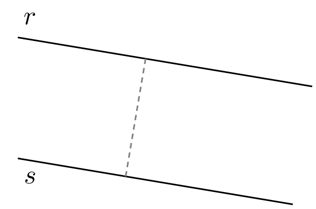
Demostración
Se trata de hacer de dos maneras el producto escalar de $\vec{w}=(A,B)$ ortogonal a r y $\vec{XP}=(x_0-x,y_0-y)$ vector de origen en un punto $X(x,y)$ culquiera de r y extremo P:
$\vec{w}.\vec{XP}=A(x_0-x)+B(y_0-y)=Ax_0+By_0-(Ax+By)=$
Ax_0+By_0+C, por otro lado:
$\vec{w}.\vec{XP} = |\vec{w}|.|\vec{XP}|.\cos\alpha = |\vec{w}|.$ proyección de $\bar{XP}$ sobre $\vec{w} =$
$\sqrt{A^2+B^2}.d(P,r)$,

despejando queda la fórmula sin más que tomar valor absoluto pues consideramos que la distancia siempre es positiva.

Ejemplos

1. Hallar la distancia del punto $(7,2)$ a la recta $4x-3y-42=0$

   $$d(P,r)=\left|\frac{4\cdot 7-3\cdot 2-42}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}\right|=\left|\frac{-20}{\sqrt{25}}\right|=\frac{20}{5}=4$$

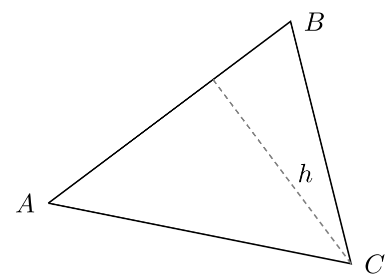


2. Hallar la distancia de la recta $r: x-2y=1$ a la recta $s: -3x+6y-2=0$

   Primero comprobamos la situación relativa de las rectas y vemos que son paralelas.

   Entonces la distancia de las rectas será igual a la distancia de un punto cualquiera de una recta a la otra, obtenemos un punto de la recta r haciendo por ej. $y=0$, resulta $x=1$, punto $P(1,0)$

   $$d(r,s)=d(P,s)=\left|\frac{-3-2}{\sqrt{(-3)^2+6^2}}\right|=\frac{\sqrt{5}}{3}$$



3. Hallar la altura del vértice C en el triángulo de vértices $A(0,0), B(6,8), C(6,0)$.

   Recta r que contiene al lado AB: $\quad 4x-3y=0$

   altura de $C=d(C,r)=\dfrac{24}{5}$

4. Hallar la bisectriz de las rectas $r: 2x-y+2=0, \quad s: x+3y-1=0$

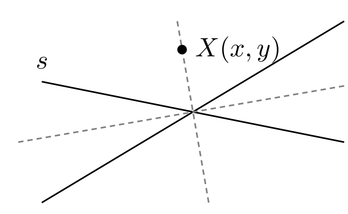
   La bisectriz de dos rectas es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de ellas.

   Por tanto haremos $d(X,r)=d(X,s)$

   $$\frac{2x-y+2}{\sqrt{4+1}}=\pm\frac{x+3y-1}{\sqrt{1+9}}$$

   tomando signo $+$: $(2\sqrt{2}-1)x-(\sqrt{2}+3)y+2\sqrt{2}+1=0$

   tomando signo $-$: $(2\sqrt{2}+1)x+(3-\sqrt{2})y+2\sqrt{2}-1=0$



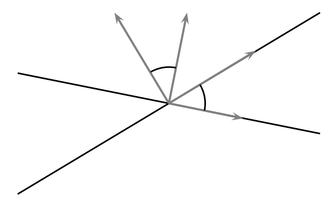
6.6. Ángulo de dos rectas

Es el menor de los ángulos que forman.($\leq 90^0$)

1) A partir de dos vectores dirección u ortogonales

Ejemplo Hallar el ángulo que forman las rectas

$r: \dfrac{x-1}{2} = y-3; \quad s: \dfrac{x+2}{-3} = \dfrac{y+5}{4}$



Los vectores respectivos son $\vec{v} = (2,1), \vec{w} = (-3,4)$

$\cos\alpha = \left|\dfrac{\vec{v}.\vec{w}}{|\vec{v}|.|\vec{w}|}\right| = \left|\dfrac{-6+4}{\sqrt{5}.\sqrt{25}}\right| = \dfrac{2}{5\sqrt{5}}$

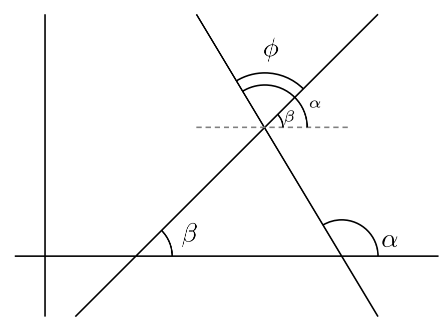
(se toma valor absoluto porque no sabemos si se trata del ángulo α o de su suplementario)

$\alpha = arc\cos\dfrac{2}{5\sqrt{5}} = 79'69^0$

2) A partir de las pendientes $\phi = \alpha - \beta$

Como $\tan\phi = \tan(\alpha-\beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha.\tan\beta}$

$$\boxed{\tan\phi = \left|\dfrac{m_1 - m_2}{1+m_1.m_2}\right|}$$



se toma valor absoluto para obtener el ángulo menor de 90^0.

Ejemplo 1 Hallar el ángulo que forman las rectas $r: x+2y-5=0, \quad s: 2x-5y+7=0$

Método I Con los vectores ortogonales:

$\cos\alpha = \left|\dfrac{2-10}{\sqrt{1^2+2^2}\cdot\sqrt{2^2+5^2}}\right| = 0'6643$

(se toma valor absoluto porque no sabemos si se trata del ángulo α o de su suplementario)

$\alpha = arc\cos 0'6643 = 48'37^0$

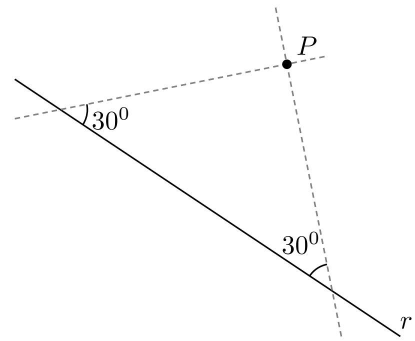
Método II Con las pendientes:

$r: x+2y-5=0; \quad y = \dfrac{x-4}{-2}; \quad m_r = -\dfrac{1}{2}$

$s: 2x-5y+7=0; \quad y = \dfrac{-2x-7}{-5}; \quad m_s = \dfrac{2}{5}$

$\tan\phi = \left|\dfrac{-\frac{1}{2}-\frac{2}{5}}{1+\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{2}{5}}\right| = \dfrac{\frac{5+4}{10}}{1-\frac{1}{5}} = \dfrac{9}{8}; \quad \phi = ar\tan\dfrac{9}{8} = 48'37^0$

Ejemplo 2 Hallar la recta que pasa por el punto $(3-1)$ y forma un ángulo de 30^0 con la recta $r: x-2y+5=0$



Sea m la pendiente de la recta buscada, $m_r = 1/2$, sustituyendo:
$\tan 30^0 = \left|\dfrac{m-1/2}{1+m,1/2}\right|; \quad \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{2m-1}{2+m}; \quad m = \dfrac{8\pm 5\sqrt{3}}{11}$

tomando el signo $+$ resulta $y+1 = \frac{8+5\sqrt{3}}{11}(x-3)$
tomando el signo $-$ resulta: $y+1 = \frac{8-5\sqrt{3}}{11}(x-3)$

6.7. Problemas

1. Hallar las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto (2,-1) y es paralela al recta 2x - 3y = 3.

   Solución: $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -1 + 2t \end{cases}$

2. Hallar las ecuaciones vectorial y paramétricas de la recta que pasa por $(3, -1)$ y tiene vector dirección (-2,4). Representarla gráficamente.

3. Hallar la ecuación general de la recta que pasa por el punto (2,-1) y es perpendicular al recta 2x - 5y = 2.

   Solución: $-5x - 2y + 8 = 0$

4. Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos (0,2), (3,4).

   Solución: $2x - 3y + 6 = 0$

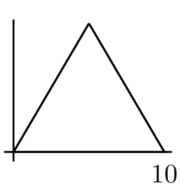
5. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto (1,2) y es paralela a la recta $\begin{cases} 3x + t = 0 \\ 4t + y = 0 \end{cases}$

   Solución: $12x - y - 10 = 0$

6. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto (-2,-4) y es paralela a la recta $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-1}{3}$.

   Solución: $\frac{x+2}{2} = \frac{y+4}{3}$

7. Hallar las ecuaciones generales de las rectas que contienen a los lados del triángulo equilátero

8. Una recta es perpendicular a la bisectriz del primer cuadrante y pasa por el punto (3,-1). Escribir sus ecuaciones paramétricas.

   Solución: $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -1 - t \end{cases}$

9. ¿ Cómo son las pendientes de dos rectas perpendiculares?.

   Solución: inversas cambiadas de signo

10. Si r: Ax + By + C = 0 y s: A'x + B'y + C' = 0 son perpendiculares, ¿qué relación guardan sus coeficientes?.

    Solución: $(A, B).(A', B') = 0, A.A' + B.B' = 0$

11. Hallar m y n en las ecuaciones mx + 2y = 6, nx - 7y = 9 sabiendo que las rectas que representan son paralelas y la primera pasa por el punto del eje OX que dista 3 unidades del origen.

    Solución: $m = 2, n = -7$

12. Una recta corta a los semiejes positivos determinando con ellos un triángulo de 30 cm de perímetro y 30 cm^2 de área. Hallar su ecuación.

    Solución: $x/5 + y/12 = 1, x/12 + y/5 = 1$

13. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto (1,-1) y es paralela a la recta 3x + 2y = 1,

    Solución: $3x + 2y - 1 = 0$

14. Se consideran las rectas $\begin{cases} r : x - 1 = y - 2 \\ s : \frac{3-x}{2} = 3 - y \end{cases}$.

    a) Comprobar que se cortan y calcular las coordenadas del punto P de intersección.

    b) Determinar la ecuación de la recta que pasa por P y es perpendicular a r.

    Solución: $P(1, 2); x + y - 3 = 0$

15. Dada la recta $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+5}{4}$.

    a) Hallar la ecuación general de la recta paralela por (7,-1).

    b) Hallar la ecuación general de la perpendicular por (2,-5).

    c) Hallar la ecuación segmentaria de la paralela que pasa por el punto de intersección de las rectas $r: 2x+y=3, r': \dfrac{x+1}{3}=2-y$.

    d) Comprobar si (-3,7) pertenece a la recta dada.

    Solución: a) $4x-3y-31=0$, b) $3x+4y+14=0$, c) $P(4/5,7/5)$, $\frac{x}{-\frac{1}{4}}+\frac{y}{\frac{1}{3}}=1$, d) no pertenece

16. Determinar el valor de k de modo que la recta 8x + 15y + k = 0 diste 5 unidades del punto (2,3).

    Solución: $k=24, k=-146$

17. Hallar la distancia del punto A(1,3) a la recta r: x + y = 0, y la ecuación de la recta que pasa por A y es perpendicular a r.

    Solución: $d=2\sqrt{2}, -x+y-2=0$

18. Calcular la ecuación de la recta paralela al eje OX y dista 6 unidades del punto P(0,8).

    Solución: $-y+2=0, -y+14=0$

19. Sea el punto A(1,3) y la recta r: $\begin{cases} x=t \\ y=2+t \end{cases}$. Hallar:

    a) La ecuación de la recta perpendicular a la recta r que pasa por A.

    b) La intersección de esta recta con la recta dada r.

    c) La distancia del punto A a la recta r.

    Solución: a) $x+y-4=0$, b) (1,3), c) 0

20. Dada la recta r : x+1 = y-2 , y el punto P(1,2). Calcular:

    a) Las ecuaciones de la recta s que pasa por P y corta perpendicularmente a r.

    b) Hallar el punto de intersección de r y s.

    c) Hallar las coordenadas del punto simétrico de P respecto de r.

    Solución: a) $x+y-3=0$, b) (0,3), c) (-1,4)

21. Dada la recta x + 2y = 9 y el punto A(2,1), sabiendo que la recta es mediatriz del segmento $\bar{AB}$, hallar las coordenadas de B. Representación gráfica.

    Solución: (4,5)

22. Hallar la recta que pasa por el punto medio del segmento de extremos A(2,-5), B(4,1), y es perpendicular al recta: (x,y) = (1,-3) + t(2,1)

    Solución: $(x,y)=(3,-2)+t(1,-2)$

23. Dadas las rectas x + y = 0, 2x - y = 0, encontrar la ecuación de las bisectrices.

    Solución: $(\sqrt{5}+2\sqrt{2})x+(\sqrt{5}-\sqrt{2})y=0, (\sqrt{5}-2\sqrt{2})x+(\sqrt{5}+\sqrt{2})y=0$

24. Hallar la recta paralela a la 3x + 4y + 25= 0;

    a) que dista 2 unidades del origen;

    b) está 3 unidades más lejos del origen que la recta dada;

    c) dista 1 de la recta dada.

    Solución: a) $3x+4y+10=0, 3x+4y-10=0$, b)$3x+4y+40=0$, c) $3x+4y+30=0, 3x+4y+20=0$

25. Hallar el ángulo de las rectas r: x + 5y + 2 = 0, s: 2y = 1 - 3x.

    Solución: 45^0

26. Determinar la ecuación de una recta que pasando por el punto A(5,-2) forma un ángulo de 45^0 con la recta 3x + 7y - 12 = 0.

    Solución: $+ : y+2 = \frac{2}{5}(x-5), - : y+2 = \frac{-5}{2}(x-5)$

27. Determinar si están alineados los puntos (3,4), (1,2), (5,1). Hallar el área del triángulo que forman si es el caso.

    Solución: 5 u^2

28. Hallar la simétrica de la recta $x+y-2=0$: a) respecto a la recta $x-y+1=0$; b) respecto al eje de abcisas.

    Solución: a) la misma recta es la simétrica por ser perpendicular b) $y = x-2$

29. Dado el triángulo ABC, con A(0,0), B(4,7), C(−3,5). Hallar:

    a) Altura h del vértice C.

    b) Ecuación general de la recta que contiene a la mediana de C.

    c) Ecuación general de la mediatriz del lado AB

    d) Ecuación general de la recta que contiene a la altura de C

    e) Ecuación general de la bisectriz de C

    f) Area del triángulo

    g) Angulo C.

    Solución: a) $\frac{41}{\sqrt{65}}$, b) $3x+10y-41 = 0$, c) $8x+14y-65 = 0$, d) $4x+7y-23 = 0$, e) $y = -0'39x+3'81$, f) $20'5u^2$, g) $74'9^0$

30. Encontrar la familia de rectas que cumple cada condición:

    I) Pendiente −3

    II) Pasa por el origen

    III) La ordenada en el origen es -5

    IV) Pasa por el punto $(-1,5)$

    V) Paralela a la recta $4x-3y+7=0$

    VI) Perpendicular a la recta $6x-5y-8=0$

    VII) Es paralela a la bisectriz del primer cuadrante

    VIII) No corta al eje de abcisas.

31. Dado el triángulo de vértices $A(0,0), B(14,0), C(9,12)$

    I) Hallar la recta que contiene al lado AB.

    Solución: $y = 0$

    II) Hallar la recta paralela por B al lado AC.

    Solución: $4x-3y-56=0$

    III) Hallar el ángulo que forma con la horizontal positiva la recta que contiene al lado BC.

    Solución: $B = 112'62^0$

    IV) Hallar la longitud del lado BC.

    Solución: 13

    V) Hallar la recta que contiene a la mediana del vértice B.

    Solución: $12x+19y-168=0$

    VI) Hallar la recta que contiene a la altura del vértice A.

    Solución: $-5x+12y0$

    VII) Hallar el ángulo A.

    Solución: $A053'13^0$

VIII) Hallar la longitud de la altura del vértice A.

Solución: 168/13

IX) Hallar la bisectriz del ángulo C.

Solución: $AC : 8x - y - 60 = 0$

X) Hallar la mediatriz del lado AC.

Solución: $6x + 8y - 75 = 0$

XI) Hallar el área del triángulo.

Solución: $84u^2$

XII) Hallar el simétrico de B respecto a la recta que contiene a AC.

Solución: $B' = (-98/25, 336/25)$

XIII) Hallar la recta que pasa por B y dista 5 unidades del origen.

Solución: $y = \pm\frac{5}{\sqrt{171}}(x - 14)$

Capítulo 7

CÓNICAS

7.1. Lugar geométrico

Se define lugar geométrico en el plano como el conjunto de puntos que verifican una determinada propiedad. Así por ejemplo:

Mediatriz de un segmento es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los extremos del segmento.

Bisectriz de un ángulo es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los lados del ángulo.

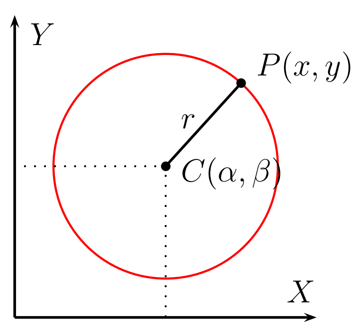
7.2. Circunferencia

Es el conjunto de puntos del plano que equidistan de uno fijo C llamado centro, la distancia se llama radio r.

Ecuación Si el centro es $C(\alpha, \beta)$, por la fórmula de distancia entre dos puntos: $\sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2} = r$ luego:

La ecuación de la circunferencia es: $\boxed{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2}$

desarrollando queda: $x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0$



Ejemplos

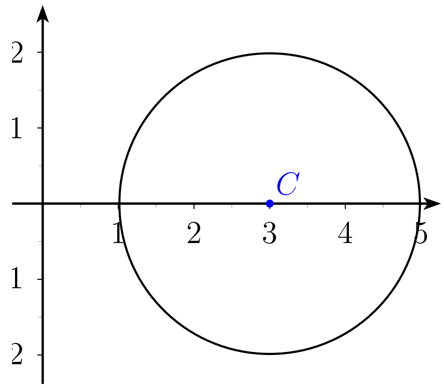
1. Circunferencia de centro $(3, -1/2)$ y radio 2

   $(x-3)^2 + (y+\frac{1}{2})^2 = 4$; si desarrollamos queda: $x^2 - 6x + 9 + y^2 + y + \frac{1}{4} = 4$; $4x^2 + 4y^2 - 24x + 4y + 21 = 0$

   Luego para que una ecuación de 2^0 grado en x e y represente una circunferencia ha de carecer de término en xy y los coeficientes de x^2 e y^2 han de ser iguales.

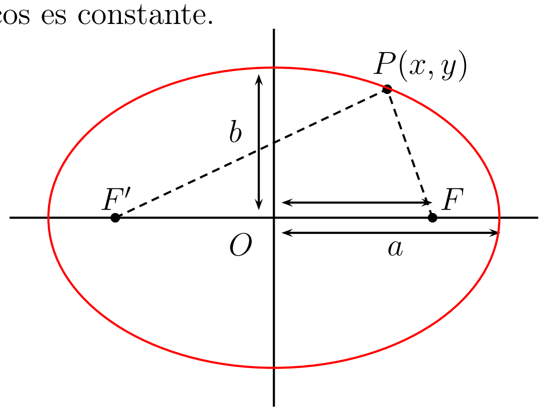
2. Hallar el centro y el radio de la circunferencia $x^2 - 6x + y^2 + 5 = 0$

Completamos cuadrados
$x^2 - 6x = (x-3)^2 - 9$
y^2
sustituyendo
$x^2 - 6x + y^2 + 5 = (x-3)^2 - 9 + y^2 + 5 = 0$
$(x-3)^2 + y^2 - 4 = 0; \quad (x-3)^2 + y^2 = 4$
centro $(3,0)$, radio 2



7.3. Elipse

Es el lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a dos puntos fijos F y F' llamados focos es constante.



La ecuación de la elipse es:

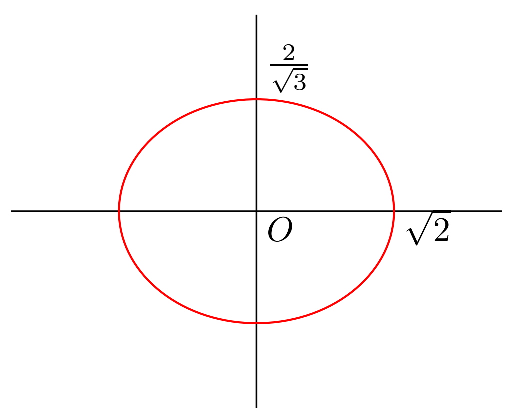
$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

a semieje horizontal
b semieje vertical

Ejemplo Representar $4x^2 + 6y^2 - 8 = 0$

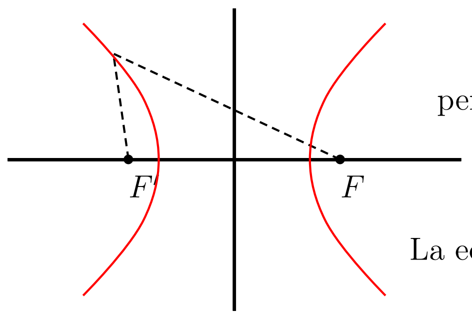
$$\frac{4x^2}{8} + \frac{6y^2}{8} = 1$$

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{\frac{4}{3}} = 1; \quad a = \sqrt{2}; \quad b = \frac{2}{\sqrt{3}}$$



7.4. Hipérbola

Es el lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos F y F' llamados focos es constante.



a semieje horizontal

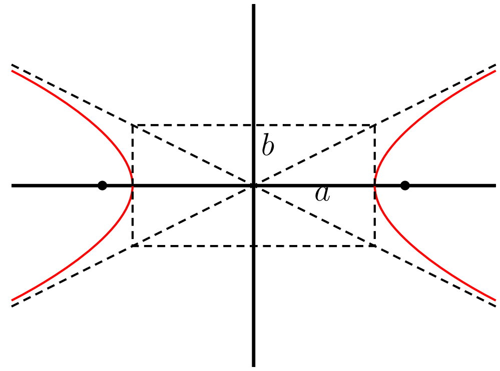
b semieje vertical

pendiente de las asíntotas :

$$m_1 = \frac{b}{a}; \quad m_2 = \frac{-b}{a}$$

La ecuación de la hipérbola es:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

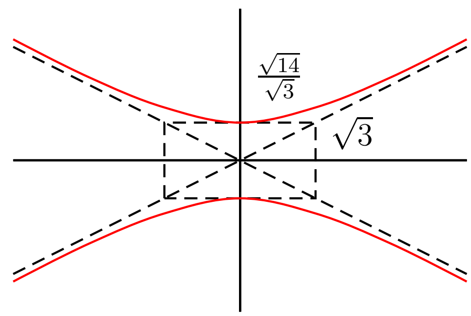


Ejemplo Cuando el signo $-$ lo lleva x^2 la hipérbola tiene como eje real (con el que tiene puntos de corte) el de las ordenadas:

Representar $2x^2 - 3y^2 + 14 = 0$

$$-\frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{\frac{14}{3}} = 1$$

$$a = \sqrt{7}, \quad b = \sqrt{\frac{14}{3}}$$

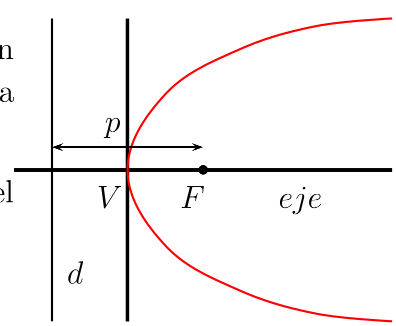


7.5. Parábola

Es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de un punto fijo F, llamado foco y de una recta fija d, llamada directriz.

La ecuación de la parábola horizontal que pasa por el origen es:

$$\boxed{y^2 = 2px}$$

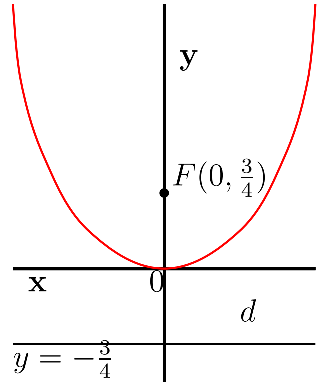


Ejemplo Hallar la directriz y el foco de la parábola $y = \dfrac{x^2}{3}$

Es una parábola vertical, despejando x^2 queda: $x^2 = 3y$, luego $2p = 3$, $\quad p = \dfrac{3}{2}$
Luego:

foco: $F(0, \dfrac{3}{4})$

directriz: $y = -\dfrac{3}{4}$



Nota: Se representan por el método general:

- Las hipérbolas con asíntotas paralelas a los ejes, tienen de ecuación: $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$
- Las parábolas $y = ax^2 + bx + c$

7.6. Problemas

1. Ecuación de la circunferencia de diámetro AB siendo A(4,3), B(0,7).

   Solución: $x^2 + y^2 - 4x - 10y + 21 = 0$

2. Representar $x^2 + 2x + y^2 - 9 = 0$

   Solución: $r = \sqrt{10}, C(-1, 0)$

3. Ecuación de la circunferencia de centro (4,1), que es tangente a la recta $5x+20y-8 = 0$.

   Solución: $(x-4)^2 + (y-1)^2 = \frac{32^2}{425}$

4. Representación gráfica de $3x^2 + 5y^2 = 15$.

5. Representación gráfica de $9x^2+5y^2-19 = 0$.

6. Representación gráfica de $x^2-4y^2-11 = 0$

7. Representación gráfica de $-3x^2+5y^2-7 = 0$.

8. Representación gráfica de $y = \dfrac{5x+1}{x}$.

9. Representación gráfica de $2x^2 + 4y^2 = 9$.

10. Representación gráfica de $y^2+8y-5+x = 0$.

11. Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a $(-4, 0)$ y $(4, 0)$ es 10.

12. Hallar la ecuación de una parábola de vértice en $(3, 1)$ y directriz $x = 0$.

13. Representar y hallar los elementos de $y^2 = 4x$.

14. Una circunferencia de centro $(5, 3)$ es tangente a la recta que pasa por $A(1, 3)$ y forma con OX un ángulo de 45^0

    a) Hallar las coordenadas del punto de tangencia.

    b) Hallar la ecuación de la circunferencia.

    Solución: $(3, 5)$, $(x-5)^2 + (y-3)^2 = 8$

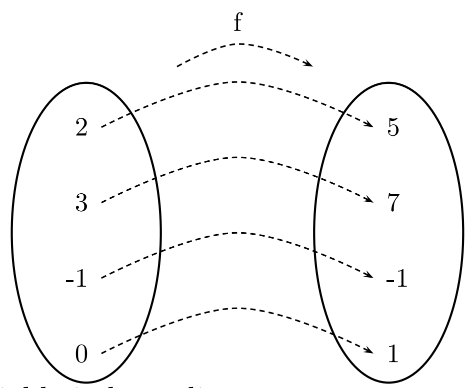
Capítulo 8

FUNCIONES

8.1. Función

Una función transforma números en números,

Dicho con más precisión, una función es una aplicación [1] en la que el conjunto original y el conjunto final están formados por números.



Ejemplo

$$\begin{array}{rl} f: & R \longrightarrow R \\ & x \longrightarrow f(x) = 2x+1 \end{array}$$

Esta función de los números reales en los números reales le asocia a cada número su doble más uno.

En general una función se representa : $y = f(x)$

x es un elemento cualquiera del conjunto original, se llama variable independiente;

y representa su correspondiente imagen en el conjunto final, se llama variable dependiente.

Al conjunto de valores que toma x se le llama **dominio** D , es un subconjunto del conjunto original, si no se especifica, es el mayor posible.

Ejemplos

1. $\begin{array}{rll} f: & [-1,1] & \longrightarrow R \\ & x & \longrightarrow f(x) = \frac{1}{x-2} \end{array}$, $\quad Dom(f) = [-1,1]$

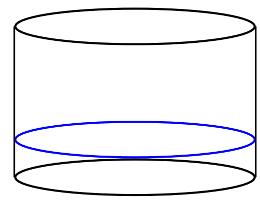
2. $y = \dfrac{1}{x-2}, \quad Dom(f) = R - 2$

3. $y = \sqrt{x+3}$, ha de ser: $x + 3 \geq 0, x \geq -3, \quad Dom(f) = [-3, \infty)$

[1] aplicación quiere decir que un número no puede tener más de una imagen, por ejemplo $y^2 = x$ que equivale a $y = \pm\sqrt{x}$, NO ES FUNCION

Al conjunto de valores que toma la y se le llama rango, recorrido ó imagen, (se deduce de la gráfica).

4. Se tiene un depósito cilíndrico de agua de diámetro 10 m y altura 7 m.
Expresar el volumen de agua en función de la altura h del agua en el depósito.
Solución:
Volumen cilindro = área de la base × altura
$V = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot 5^2 \cdot h = 25 \cdot \pi \cdot .h \approx 78'5 \cdot h \quad m^3$
El dominio de esta función es $[0, 7]$.



8.2. Gráfica de una función

Dada una función $y = f(x)$, los puntos de coordenadas $(x, f(x))$ representan puntos del plano, el conjunto de ellos es la gráfica de la función.

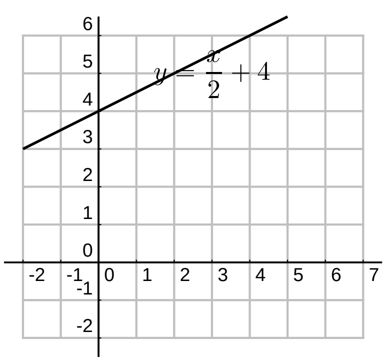
Ejemplos a) $y = \dfrac{x}{2} + 4$

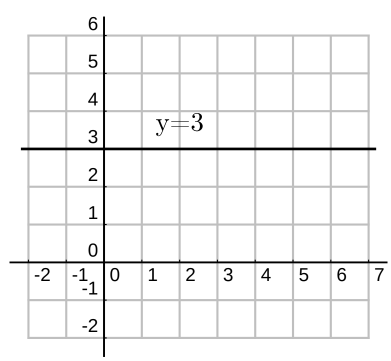
x	y
0	4
4	6

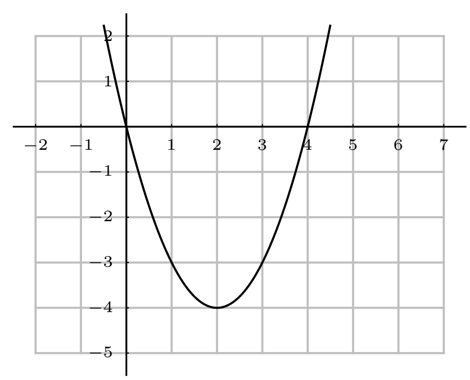
b) $y = 3$

c) $y = x^2 - 4x$ (es una parábola)
$0 = x^2 - 4x = x(x - 4)$
vértice: $x_v = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{4}{2} = 2$

x	y
0	0
4	0
2	-4



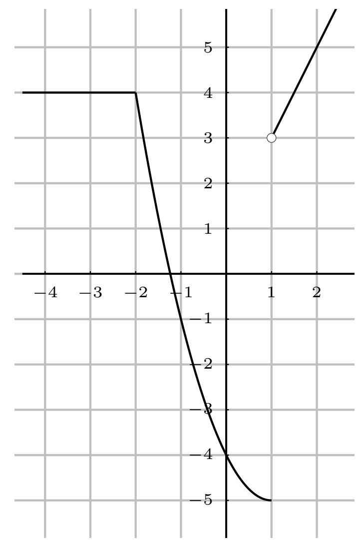




d) $f(x) = \begin{cases} 4 & si \quad x \le -2 \\ x^2 - 2x - 4 & si \quad -2 < x \le 1 \\ 2x + 1 & si \quad 1 < x \end{cases}$

Como la función está definida a trozos hay que dar también los valores de x en que cambia de expresión.

El primer trozo es una recta horizontal.



El segundo es una parábola:
$y = x^2 - 2x - 4$
Puntos de corte:
Con OX: $y = 0$: $x^2 - 2x - 4 = 0; x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4+16}}{2} =$
$\dfrac{2 \pm \sqrt{20}}{2} \approx \begin{cases} 3'23 \\ -1'23 \end{cases}$
Con OY: $x = 0$ resulta $y = -4$
vértice: $x_v = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{2}{2} = 1$

Puntos donde se parte el dominio:

x	y
-2	4
1	-5

El tercer trozo $2x + 1$ es una recta:

x	y
1	3
2	5

8.3. Clasificación de las funciones

Recordemos que una función transforma números en números.

EMPIRICAS: (No tienen fórmula.) Ej.: temperatura de un enfermo dependiendo del tiempo transcurrido.
ANALITICAS: (Con fórmula)

Trascendentes : $y = e^x$
Algebraicas :

Irracionales : x dentro de raíz: $y = \sqrt{x+4}$.
Racionales : x no dentro de raíz.

Fraccionarias : x en denominador: $y = \dfrac{1}{x+3}$
Polinómicas : $y = \sqrt{3}x - \dfrac{5}{4}$

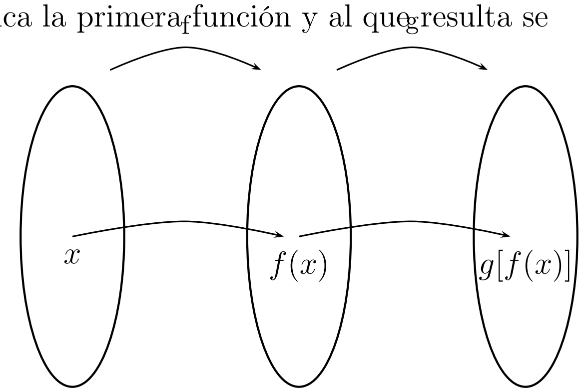
8.4. Operaciones con funciones

Para sumar, multiplicar, dividir, ..., dos funciones, se suman, multiplican, dividen, ..., sus expresiones.

$f(x) = 3x - 5; \qquad g(x) = \sqrt{x}$
$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = 3x - 5 + \sqrt{x}$
$(f.g)(x) = f(x).g(x) = (3x - 5)\sqrt{x}$
$(f/g)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{3x-5}{\sqrt{x}}$

8.5. Composición de funciones

En la composición de funciones a un número se le aplica la primera función y al que resulta se le aplica la segunda.



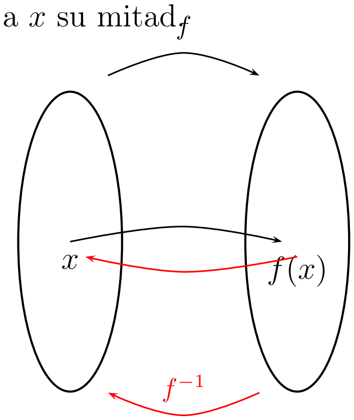
Función compuesta de dos funciones es la función que a cada valor de la variable independiente le asocia la imagen por la 2^a función de la imagen de la 1^a función.

$f(x) = 2x; \quad g(x) = x^3$
$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(2x) = (2x)^3 = 8x^3$

La composición de funciones no es conmutativa.
$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(x^3) = 2x^3$

8.6. Función inversa

Si f asocia a x su doble $2x$, la función inversa será f^{-1} que asocia a x su mitad



Función identidad es la que a cada valor de x le asocia el mismo valor de x.

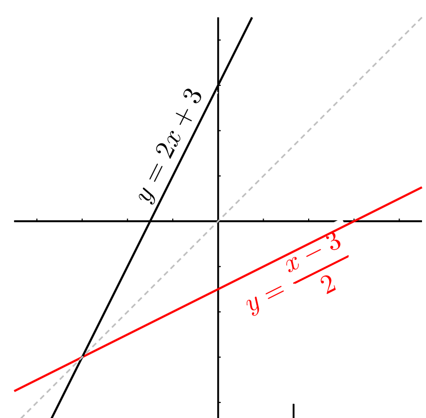
$$i : i(x) = x$$

Dada una función f, su función inversa f^{-1} es aquella que compuesta con f da la función idéntica
$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}[f(x)] = x$ o sea, $f^{-1} \circ f = i$

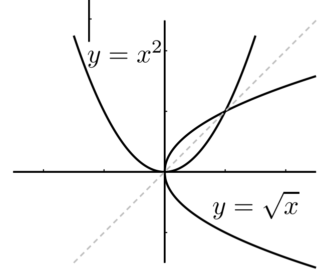
Ejemplo Comprobar que son inversas las funciones:
$f : y = 2x + 3, \quad g : y = \dfrac{x-3}{2}$
$g[f(x)] = g(2x+3) = \dfrac{(2x+3)-3}{2} = x$
efectivamente: $g = f^{-1}$

f: x	y
0	3
2	7

g: x	y
3	0
5	1



Las gráficas de dos funciones inversas son simétricas respecto a la bisectriz del primer cuadrante.
Si f^{-1} es la inversa de f, f es la inversa de f^{-1}, por eso se dice simplemente que son inversas.
No siempre existe función inversa.
Por ejemplo: $f : y = x^2$
en la gráfica vemos que si hubiera inversa para ella cada original tendría dos imágenes y no sería función



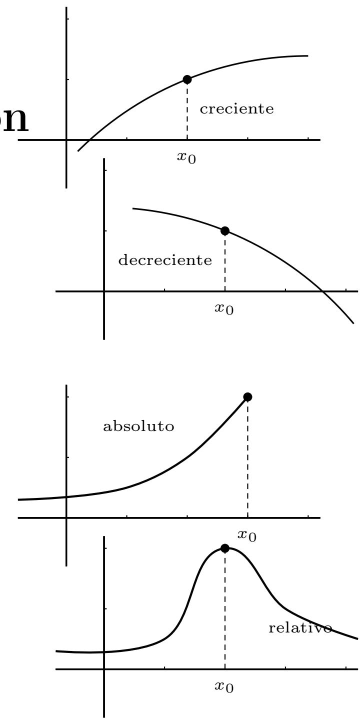
Cálculo de la función inversa Para hallar la función inversa, se intercambia la x con la y, luego se despeja la y.

Ejemplo Hallar la inversa de la función : $f(x) = \dfrac{2x-3}{x-1}$

$$y = \frac{2x-3}{x-1}; \quad x = \frac{2y-3}{y-1}; \quad x(y-1) = 2y+3; \quad xy - x = 2y+3; \quad xy - 2y = x+3$$

$$y(x-2) = x+3; \quad f^{-1} : y = \frac{x+3}{x-2}$$

8.7. Monotonía y extremos de una función



Se trata de describir el comportamiento de la función, por eso hablamos de función creciente, decreciente, máximos y mínimos

Una función es **creciente** cuando al aumentar la x entonces aumenta la y. Gráfica hacia arriba.

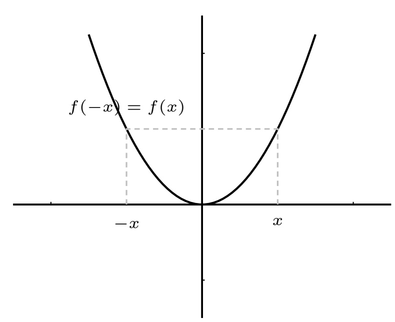
Una función es **decreciente** cuando al aumentar la x entonces disminuye la y. Gráfica hacia abajo.

Una función tiene un **máximo absoluto** en un punto x_0, si en ese punto toma el mayor valor.

Una función tiene un **máximo relativo** en un punto x_0, si en ese punto toma mayor valor que en los puntos de alrededor.

Análogo sería para **mínimo absoluto** y **mínimo relativo**.

8.8. Función par y función impar

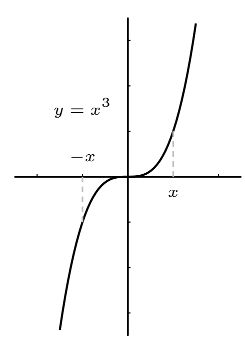


Una función $f(x)$ es **par** cuando $f(-x) = f(x)$.

Ejemplo La función: $y = x^2$

$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$; sí es par.

La gráfica de una función par es simétrica respecto al eje de ordenadas.



Una función $f(x)$ es **impar** cuando $f(-x) = -f(x)$.

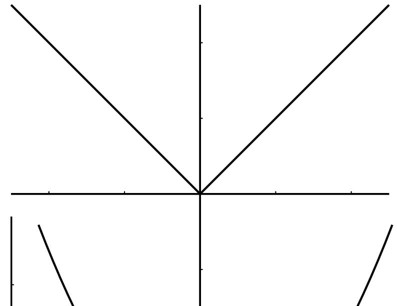
Ejemplo $y = x^3$

$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$, sí es impar

La gráfica de una función impar es simétrica respecto al origen.

Una función puede no ser par ni impar.

8.9. Función valor absoluto



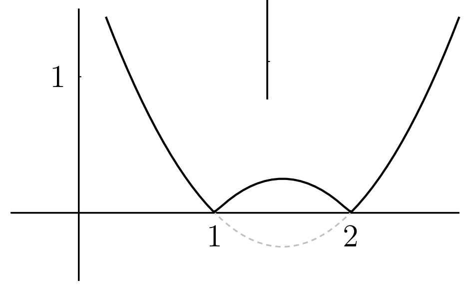
$$|x| = \begin{cases} x & si \quad x \geq 0 \\ -x & si \quad x < 0 \end{cases}$$

nota: el signo "$-$"delante de una letra le cambia el signo, no dice que sea negativa.

Ejemplos

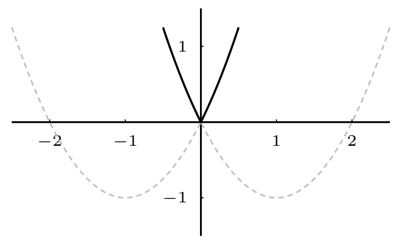
1. Representar $y = |x^2 - 3x + 2|$

   para ello representamos $f(x) = x^2 - 3x + 2$ y luego hacemos la simetría de la parte que queda debajo del eje de abcisas



2. Representar $y = x^2 + 2|x|$

   escribimos la función a trozos: $y = \begin{cases} x^2 + 2x & si \quad x \geq 0 \\ x^2 - 2x & si \quad x < 0 \end{cases}$



8.10. Límite de una función

Límite de una función en un punto Trata del valor al que se acercan las imágenes cuando la variable independiente se aproxima a un cierto valor x_0. Lo normal es que las imágenes se acerquen a la imagen de x_0, pero no siempre es así.

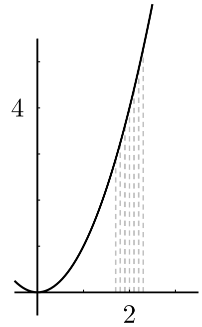
Una función $y = f(x)$ tiene por límite a L cuando x tiende a x_0 si al acercarse x a x_0, entonces la y se acerca a L. Esto se escribe : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$

que se lee: "límite cuando x tiende a x_0 de $f(x)$ es igual a L.

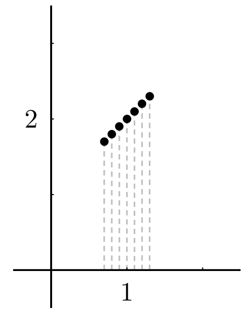
Ejemplos

La función $y = x^2$ cuando $x \to 2$

$$\lim_{x \to 2} x^2 = \left\{ \begin{array}{c|ccc} x & 1'9 & 1'99 & 1'999 \\ \hline y & 3'61 & 3'96 & 3'99 \\ x & 2'1 & 2'01 & 2'001 \\ \hline y & 4'41 & 4'04 & 4'004 \end{array} \right\} = 4$$



La función $y = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ cuando $x \to 1$

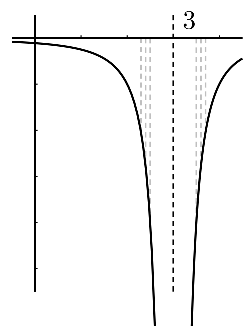


$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \left\{ \begin{array}{c|ccc} x & 0'9 & 0'99 & 0'999 \\ \hline y & 1'9 & 1'99 & 1'999 \\ x & 1'1 & 1'01 & 1'001 \\ \hline y & 2'1 & 2'01 & 2'001 \end{array} \right\} = 2$$

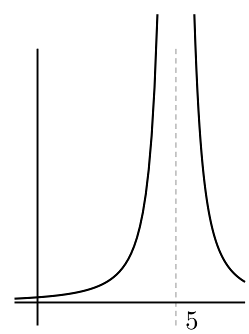
No hay límite la función se va a infinito: (nota: **asíntota** es una recta a la cual se acerca la función en el infinito).

Una función $y = f(x)$ tiende a infinito cuando x tiende a x_0 si al acercarse x a x_0, la y se hace enormemente grande, hay asíntota vertical.

$$\lim_{x\to 3} \frac{-1}{(x-3)^2} = \left\{ \begin{array}{c|ccc} x & 2'5 & 2'7 & 2'9 \\ \hline y & -4 & -11'1 & -100 \\ x & 3'5 & 3'3 & 3'1 \\ \hline y & -4 & -11'1 & -100 \end{array} \right\} = -\infty$$



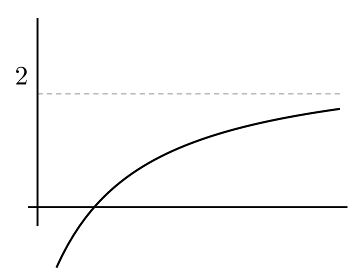
$$\lim_{x\to 5} \frac{1}{(x-5)^2} = \infty$$



Límite cuando x tiende a infinito:

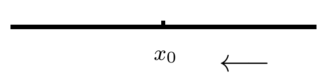
$$\lim_{x\to \infty} \frac{2x-3}{x+2} = 2;$$

si es un número hay asíntota horizontal;
Análogamente: límite cuando x tiende a $-\infty$

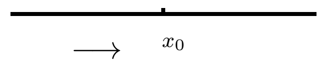


Límites laterales Resultan de acercarse x a x_0 sólo por uno de los lados:

Si nos acercamos con valores mayores que x_0 se llama límite lateral por la derecha y se escribe: $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$.



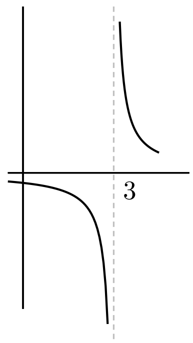
Para la izquierda es $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$



Ejemplos

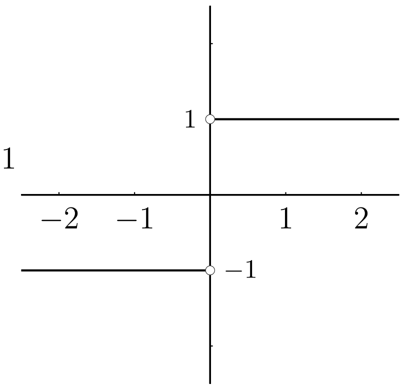
a) $\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{1}{x-3} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{1}{x-3} = +\infty$



b) $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{|x|}{x} = -1$

$\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{|x|}{x} = 1$



8.11. Cálculo de límites de funciones

1ª regla Sustituir la x por el valor al cual se acerca x_0. El número que resulta es el límite (salvo indeterminación). Ejemplos :

$$\lim_{x \to 2} 3x^2 - 5 = 7; \qquad \lim_{x \to -\infty} 3x^2 - 5 = \infty$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{3x - 5x^2}{6x - 4} = 0; \qquad \lim_{x \to 0} \left(\frac{3}{5x+1} \right)^x = \left\{ 3^0 \right\} = 1$$

2ª regla: Límite de un polinomio partido por otro polinomio

1. Cuando x tiende a infinito: Este límite se calcula a partir de las mayores potencias que dan el orden del infinito.

   a) Cuando el grado del numerador es menor que el del denominador, el denominador es más potente, el límite es 0.
   $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x-5}{x^2+1} =$ dividiendo por x $= \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3 - \frac{5}{x}}{x + \frac{1}{x}} = 0$

   b) Cuando el grado del numerador es igual que el del denominador, son igualmente potentes, el límite es el cociente de los coeficientes de mayor grado.
   $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x^2-5}{7x^2+x} =$ dividiendo por $x^2 = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3 - \frac{5}{x^2}}{7 + \frac{1}{x}} = \dfrac{3}{7}$

   c) Cuando el grado del numerador es mayor que el del denominador, el numerador es más potente, el límite es $\pm\infty$. En este caso el signo del infinito se deduce del signo de los coeficientes de mayor grado del numerador y del denominador.
   $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2+1}{3x-5} =$ dividiendo por x $= \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x + \frac{1}{x}}{3 - \frac{5}{x}} = \infty$

2. Cuando x tiende a menos infinito es igual que cuando x tiende a infinito. Sólo hay que preocuparse del signo cuando el límite resulta infinito.

   Ejemplo: $\displaystyle \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-3x+2}{8x-1} = -\infty$

3. Cuando x tiende a 0 el límite se calcula sacando factor común y simplificando.

   Ejemplo: $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{3x^2-5x}{3x+10x^3} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{x\to 0} \frac{x(3x-5)}{x(3+10x^2)} = \frac{3x-5}{3+10x^2} = -\frac{5}{3}$

   Ejemplo: Si sale infinito, para saber el signo, en este caso hay que hallar los límites laterales.

   $$\lim_{x\to 0} \frac{3x^2-5}{3x+10x^3} = \left\{\frac{-5}{0}\right\} = \pm\infty$$

   $$\lim_{x\to 0^-} \frac{3x^2-5}{3x+10x^3} = \left\{\frac{-5}{-0}\right\} = \infty; \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{3x^2-5}{3x+10x^3} = \left\{\frac{-5}{0}\right\} = -\infty$$

4. Cuando x tiende a a, siendo a un número distinto de 0:

   Ejemplos: $\displaystyle \lim_{x\to 2} \frac{x^2-3x+2}{x+4} = \left\{\frac{0}{6}\right\} = 0; \quad \lim_{x\to 2} \frac{3x+5}{x^2-4} = \left\{\frac{11}{0}\right\} = \pm\infty$

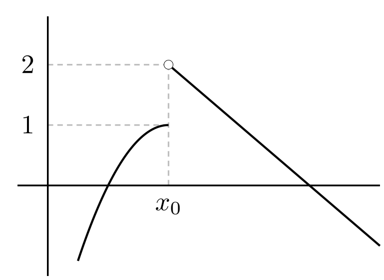
   Para saber el signo del infinito del último ejemplo hay que hacer los límites laterales.

   Cuando resulte indeterminación lo resolveremos por L'Hôpital cuando demos derivadas. De momento se puede hallar descomponiendo en factores y simplificando.

   Ejemplo: $\displaystyle \lim_{x\to 2} \frac{x^2-3x+2}{x^2-4} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-1)(x-2)}{(x+2)(x-2)} = \lim_{x\to 2} \frac{x-1}{x+2} = \frac{1}{4}$

8.12. Continuidad de funciones

Una función es continua cuando su gráfica es continua, no da saltos. Dicho con precisión: una función $f(x)$ es continua en un punto (no aislado) x_0, cuando el límite de la función en x_0 es igual al valor de la función en x_0; es decir:



$$f \text{ continua en } x_0 \iff \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

Por ejemplo: $y = x^2$ es continua siempre, en cambio $y = \dfrac{1}{x-3}$ es discontinua en $x = 3$.

En la práctica para estudiar si una función es continua en un punto se hace el límite por la derecha, el límite por la izquierda y el valor de la función. Es continua si coinciden los tres.

Las discontinuidades que consideramos son: las evitables (falta solo el punto), las de salto finito y las asíntotas verticales.

Ejemplo 1 Dada la función:

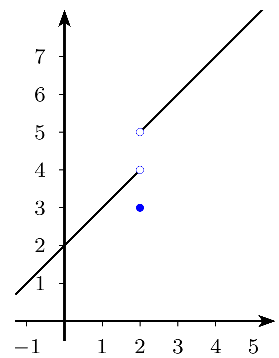
$$f(x) = \begin{cases} x+2 & si \quad x < 2 \\ x+3 & si \quad x > 2 \\ 3 & si \quad x = 2 \end{cases}$$

a) Representar gráficamente

b) Estudiar la continuidad de la función.

a)

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & si \quad x < 2 & \begin{array}{c|cc} x & 2 & 0 \\ \hline y & 4 & 2 \end{array} \\ x+3 & si \quad x > 2 & \begin{array}{c|cc} x & 2 & 4 \\ \hline y & 5 & 7 \end{array} \\ 3 & si \quad x = 2 \end{cases}$$



b) La función es continua siempre salvo en $x = 2$ que vamos estudiar:

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (x+2) = 4$

$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (x+3) = 5$

además $f(2) = 3$

Por tanto la función es discontinua en $x = 2$ con salto finito.

Ejemplo 2 Hallar a para que la siguiente función sea continua:

$$f(x) = \begin{cases} x^2+a & si \quad x < 2 \\ x+3 & si \quad x \geq 2 \end{cases}$$

Hallamos los límites laterales en $x = 2$

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (x^2+a) = 4+a$

$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (x+3) = 5$

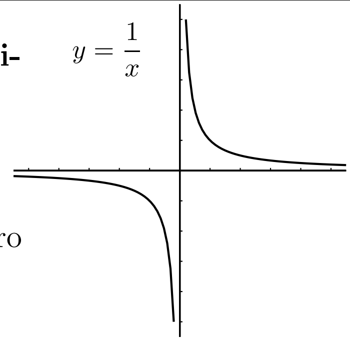
$f(2) = 5$

Para que sea continua han de coincidir: $5 = 4 + a$; $a = 1$.

La función es continua si $a = 1$

8.13. Función de proporcionalidad inversa

Ejercicio: Dado un triángulo de 6 cm^2 de área, representar la función $y = f(x)$ donde x es la base e y es la altura.

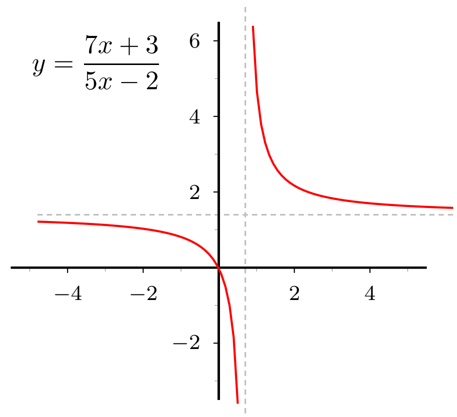


Es el caso más sencillo de función racional. Su gráfica es una **hipérbola** con asíntotas paralelas a los ejes

Tiene de ecuación $y = \dfrac{\text{polinomio grado 1}}{\text{polinomio grado 1}}$; $\qquad y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$

Para representarla basta hallar los puntos de corte (o algún otro punto) y las asíntotas vertical y horizontal.

Ejemplo Representar $y = \dfrac{7x+3}{5x-2}$



Puntos de corte
Con OX se hace $y = 0$: resulta $7x + 3 = 0 \quad x = \dfrac{-3}{7}$

Con OY se hace $x = 0$: resulta $y = \dfrac{-3}{2}$

Asíntotas
asíntota vertical, anulamos el denominador:

$$5x - 2 = 0 \quad x = \frac{2}{5} \quad \begin{cases} \lim_{x \to \frac{2}{5}^+} \frac{7x+3}{5x-2} = \left\{\frac{+}{0^+}\right\} = +\infty \\ \lim_{x \to \frac{2}{5}^-} \frac{7x+3}{5x-2} = \left\{\frac{+}{0^-}\right\} = -\infty \end{cases};$$

asíntota horizontal $y = n$, $\qquad n = \lim\limits_{x \to \infty} f(x) =$

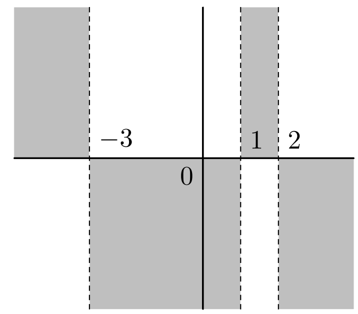
$$\lim_{x \to \infty} \frac{7x+3}{5x-2} = \frac{7}{5}; \quad y = \frac{7}{5}$$

8.14. Regionamiento o signo de la función, puntos de corte y asíntotas de una función racional

Considerar los tres aspectos juntos permite conocer como se acerca la función a las asíntotas.

Ejemplo Consideremos la función racional: $y = \dfrac{x+3}{x^2 - 3x + 2}$

Si factorizamos numerador y denominador veremos los valores de x en los que, al anularse algún factor, cambia el signo de y a uno y otro lado.



$x+3=0; \quad x=-3$

$x^2-3x+2=0; \quad x=\begin{cases}1\\2\end{cases}$

La función factorizada es: $y=\dfrac{x+3}{(x-1)(x-2)}$

para ver el signo a cada lado damos un valor cualquiera fácil:

x	-10	-3	0	1		2	
y	$-$		$+$		$-$		$+$

Obtenemos así el regionamiento:

- Los valores de x que anulan el numerador nos dan los puntos de corte con el eje de abcisas:

  Puntos de corte: con $OY: x=0$, resulta $y=\dfrac{3}{2}$

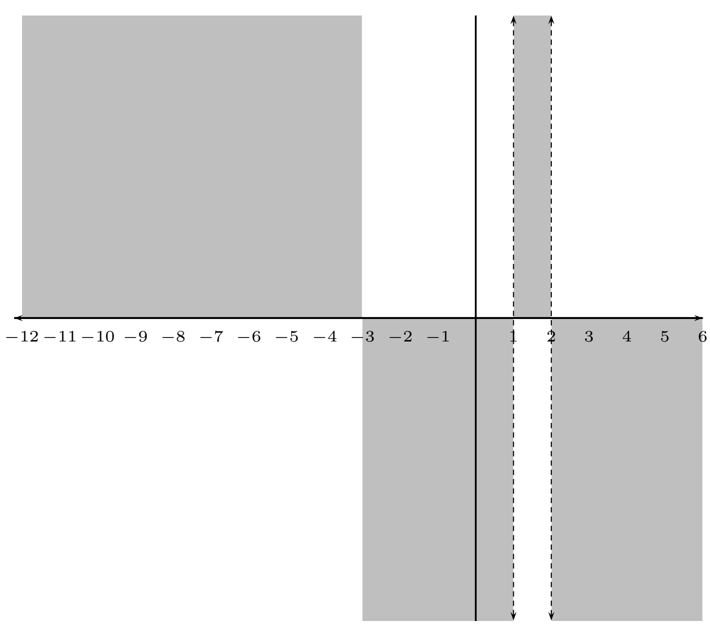
  con $OX: y=0$, resulta $x=-3$

- Los valores de x que anulan el denominador nos dan las asíntotas verticales:

  Asíntotas:

  verticales $\begin{cases}x=1\\x=2\end{cases}$

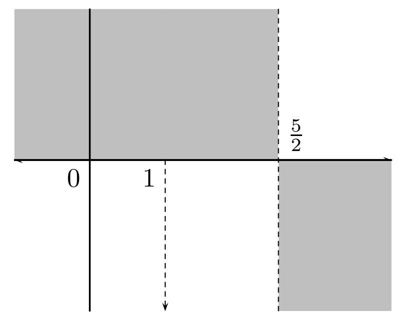
  horizontales $n=\lim\limits_{x\to\infty}(fx)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+3}{x^2-3x+2}=0$ asíntota $y=0$



Ejemplo :

La función racional: $y = \dfrac{2x-5}{(x-1)^2}$

Regionamiento:



El denominador es siempre positivo, luego solo delimita región el numerador:

$x = \{\frac{5}{2}\}$

x		$\frac{5}{2}$	
y	$-$		$+$

Puntos de corte:

con OY : $x = 0$, resulta $y = -5$

con OX : $y = 0$, resulta $x = \frac{4}{3}$

Asíntotas:

verticales $x = 1$ con el regionamiento vemos que $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{2x-5}{(x-1)^2} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{2x-5}{(x-1)^2} = -\infty$, asíntota solo por abajo.

horizontales $n = \lim\limits_{x\to\infty}(fx) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x-5}{(x-1)^2} = 0, \quad y = 0$

8.15. Problemas

1. Hallar las imágenes por $f(x) = 3x^2 - 1$

   a) de 5; b) de -1; c) de h ; d) de $x_0 + h$; e) de $\frac{x+5}{7}$

   Solución: a) 74, b)2, c) $3h^2 - 1$, d) $3(x_0 + h)^2 - 1$, e) $3\left(\frac{x+5}{7}\right)^2 - 1$

2. Hallar de quién es imagen por la función $y = x^2 + 2x - 15$

   a) y = 0; b) y = -11 c) y = -15

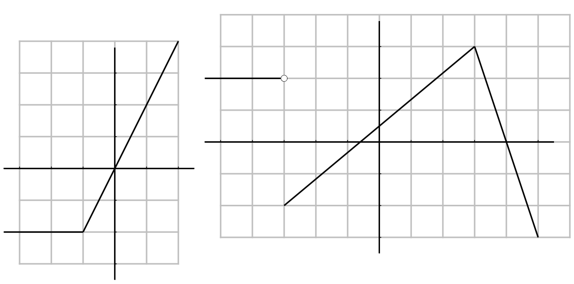
   Solución: a) $3, -5$, b) $-1 \pm \sqrt{5}$, c) $0, -2$

3. Hallar la expresión de las funciones de gráficas

   Solución:

   a) $f(x) = \begin{cases} -2 & si \quad x \leq -1 \\ 2x & si \quad -1 < x \end{cases}$

   b) $f(x) = \begin{cases} 2 & si \quad x < -3 \\ \frac{5x+3}{6} & si \quad -3 \leq x \leq 3 \\ -3x + 12 & si \quad 3 < x \end{cases}$



4. Hallar el dominio de a) $y = \dfrac{2}{1 - 3x^2}$, b) $y = \dfrac{x}{\sqrt{4 - x^2}}$

   Solución: a) R excepto $\pm\sqrt{1/3}$, b) $]-2, 2[$

5. Se quiere construir un pozo en forma cilíndrica de 2 m de diámetro. Expresar el volumen de agua que cabe en el pozo en función de su profundidad h.

   Solución: $f(x) = \pi.x$

6. Sabiendo que el cambio actual del dólar está a 110 rupias y que el banco cobra una comisión del 0'5 %, escribir las funciones que permiten pasar del valor actual de una moneda a otra.

   Solución: Cambio de rupias a \$, $y = \frac{x - 0'005x}{110}$; cambio de \$ a rupias $y = (x - 0'005x),110$

7. Representar

   $$f(x) = \begin{cases} 3 - x & si \quad x \leq 3 \\ 2x - 6 & si \quad 3 < x \leq 5 \\ 4 - x & si \quad 5 < x \end{cases}$$

8. Representar a) $f(x) = |x^2 - 3x|$, b) $g(x) = x^2 - 3|x| + 2$

9. En una máquina de calcular programable el programa B multiplica por 2 la cantidad introducida y le suma 1. Hallar el resultado de aplicar 4 veces el programa B.

   Solución: $B(B(B(B(x)))) = 16x + 15$

10. Representar

    $$f(x) = \begin{cases} 2x - 3 & si \quad x \leq -2 \\ x^2 - 6 & si \quad -2 < x \leq 4 \\ -x - 1 & si \quad x > 4 \end{cases}$$

11. Dado un cubo de arista x hallar: a) la expresión de la función real $d(x)$ que da la suma de las diagonales del cubo. b) hacer la gráfica de la función $y = d(x)$

    Solución: $d(x) = 4\sqrt{3}x$

12. Hallar la condición para que una parábola $y = ax^2 + bx + c$ sea simétrica respecto al eje de ordenadas.

    Solución: $f(x) = f(-x) \forall x \in R, b = 0$

13. Se sabe que 210^0F equivalen a 100^0C y que 0^0 equivalen a 32^0F. Hallar las funciones

lineales que dan la equivalencia de los distintos tipos de grados.

Solución: x ^{0}C, y ^{0}F, $y = ax + b, y = \frac{178}{100}x + 32$

14. Un cliente de una compañía tiene una cuota fija mensual de 1.210 rupias. Los primeros 250 kw.h consumidos le cuestan a 4'95 rupias cada uno; los siguientes hasta 900, a 3'8 rupias y los demás a 2'92 rupias. Dibújese la función que da el importe del recibo, según los kw.h consumidos. Prepárese la factura, salvo impuestos, de un cliente que consumió: a) 200 kw.h; b) 700; c) 1.000; d) ningún kw.h. e) Otra compañía, con la misma cuota fija, factura todos los kw a 3'8 rupias. ¿Cuánto debe consumirse para que los recibos de ambas compañías se eleven a la misma cantidad?

Solución: $f(x) =$
$$\begin{cases} 1210 & si \quad x = 0 \\ 1210 + 4'95x & si \quad 0 < x \leq 250 \\ 1210 + 4'95{,}250 + 3'8(x-250) & si \quad 250 < x \leq 900 \\ 1210 + 4'95{,}250 + 3'8{,}650 + 2'92(x-900) & si \quad 900 < x \end{cases}$$

15. Suponiendo que en una cabina telefónica los tres primeros minutos de conferencia cuestan 10 rupias. y otras 5 rupias. por cada tres minutos más o fracción: a) ¿Cuánto cuesta una conferencia de 7 min.? ¿Y de 8 min. 30 seg.? b) Representar la función que da el importe de la conferencia en función del tiempo. c) ¿Existe su función inversa?. d) Si han cobrado 38 rupias. por una conferencia ¿qué puedes decir del tiempo que ha durado?

Solución: $f(x) = \begin{cases} 10 & si & t \in]0,3] \\ 15 & si & t \in]3,6] \\ 20 & si & t \in]6,9] \\ 25 & si & t \in]9,12] \end{cases}$, $f(7) =$ 20 rupias, $f(8'5) = 20$ rupias, no hay inversa por no ser inyectiva.

16. Dadas las funciones
$f(x) = \dfrac{3x+2}{5}$; $\quad g(x) = 6x^2 - 1$. Hallar:

a) $f.g$; b) $f \circ g$; c) $g[f(x)]$; d) $f^2 - g$; e) f^2/g

Solución: a) $\frac{18x^3+12x^2-3x-2}{5}$, b) $\frac{18x^2-1}{5}$, c) $\frac{54x^2+72x-1}{25}$, d) $\frac{-141x^2+12x+29}{25}$, e) $\frac{9x^2+12x+4}{150x^2-25}$

17. Dadas las funciones
$f: \quad y = \dfrac{5-3x}{x-7}$; $\quad g: \quad y = x^2$. Hallar:

a) $f \circ g$; b) imagen de $3+h$ por $g \circ f$; c) inversa de f

Solución: a) $\frac{5-3x^2}{x^2-7}$, b) $\left(\frac{-4-3h}{h-4}\right)^2$, c) $\frac{7x+5}{x+3}$

18. Decir si los puntos siguientes:

$(2,3), (1,-1), (4,-3), (t, 6t-7)$; pertenecen a la gráfica de la función $y = 6x - 7$. Dibujar y escribir su función inversa.

19. Representar $y = |2x+1|$

20. Dadas las funciones $f: \quad y = \dfrac{5-3x}{x-7}$; $\quad g: \quad y = \sqrt{x}$. Hallar: a) $f \circ g$; b) inversa de f ; c) inversa de g ; d) gráficas de g y g^{-1}

21. Hallar la función inversa de $f(x) = 5x + 1$

22. Hallar la función inversa de $f(x) = \sqrt{x}$

23. Hallar la función inversa de $f(x) = \dfrac{4-2x}{x+3}$

24. Representar: $y = |(x-3)(x+1)|$

25. Representar: $y = (x-2)(5+|x|)$

26. Representar: $y = |12 - 3x|$

27. Representar: $y = x^2 - 5x + 6$

28. Representar: $y = (3+x)(2-|x|)$

29. Resolver: $2x^2 - 8x - 10 \geq 0$

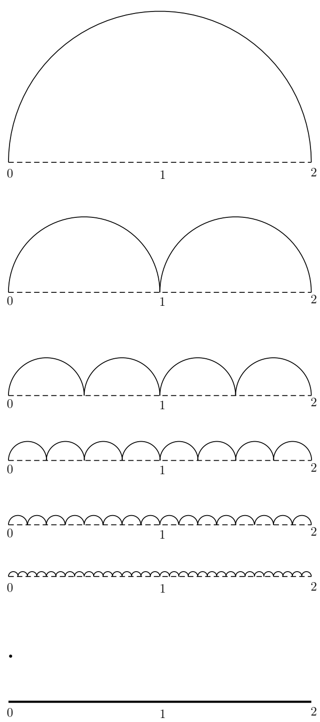
Solución: $(-\infty, -1]$ y $[5, \infty)$

30. Resolver: $x^2 + 4x - 5 \leq 0$

31. Hallar la función suma de las funciones $f(x) = \begin{cases} x+4 & si \quad x<0 \\ 2x & si \quad 0 \le x \end{cases}$ $\quad g(x) = \begin{cases} -x+1 & si \quad x<2 \\ 3 & si \quad x \ge 2 \end{cases}$

    Solución: $(f+g)(x) = \begin{cases} 5 & si \quad x<0 \\ x+1 & si \quad 0 \le x < 2 \\ 2x+3 & si \quad 2 \le x \end{cases}$

32. Hallar el límite de la longitud del recorrido curvo desde 0 hasta 2:



. . .

33. Calcular:

    a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2}{2x^2+10}$;

    b) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{3x}{3x+1}$;

    c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{70}{x^2}$;

34. Calcular

    a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} 2^x$

    b) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} 2^x$

    c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} 2^x$

35. Dada la función $\dfrac{x^2-5x+6x^3}{3x^2-5x-12x^3}$. Hallar:

    a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$; b) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)$; c) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x)$; d) $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} f(x)$

    Solución: a) $-1/2$, b) $-1/2$, c) 1, d) 1

36. Siendo $f : y = x^2 - 3x$, hallar: $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h}$ Solución: 1

37. Calcular $\lim \dfrac{3x^2+5x}{x+1}$ cuando:

    a) $x\to\infty$; b) $x\to-\infty$; c) $x\to 0$;

38. Calcular $\lim(x^3-3x+1000)$ cuando:

    a) $x\to\infty$; b) $x\to-\infty$; c) $x\to 0$;

39. Calcular $\lim(x^2-2x+1)$ cuando:

    a) $x\to\infty$; b) $x\to-\infty$; c) $x\to 3$;

40. Calcular $\lim \dfrac{2x}{x^2-3}$ cuando:

    a) $x\to\infty$; b) $x\to-\infty$; c) $x\to 0$;

41. Calcular $\lim \dfrac{6x^3-12x}{3x+5x^2+4x^3}$ cuando:

    a) $x\to\infty$; b) $x\to-\infty$; c) $x\to 0$;

42. Calcular

    a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^4-1}{x^2-2x+1}$

    b) $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{x^2-5x+6}{9-x^2}$

    Solución: a) $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} = -\infty$; $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} = \infty$ $\quad$ b) $-\dfrac{1}{6}$

43. Calcular $\lim \dfrac{28x+5}{21-7x}$ cuando:

    a) $x\to 3$; b) $x\to\infty$; c) $x\to 0$;

44. Calcular $\lim \left(5 - \dfrac{7}{x-2}\right)$ cuando:

    a) $x\to\infty$; b) $x\to-\infty$; c) $x\to 2$;

    Calcular los siguientes límites:

45. $\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+3} - x - 2) = 2$

46. $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{3\,x^2 - 5\,x + 4}{2\,x+1} - \frac{6\,x-7}{4}\right) = -\frac{3}{2}$

47. $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+3\,x+2}{x+2} - x - 2\right) = -1$

48. $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{2\,x^3 - 14\,x^2 + 12\,x}{x^3 - 10\,x^2 + 27\,x - 18}\right) = 2$

49. $\lim_{x\to 1} \left(\frac{2\,x^3 - 14\,x^2 + 12\,x}{x^3 - 10\,x^2 + 27\,x - 18}\right) = -1$

50. $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{5\,x+1}{5\,x-3}\right)^{x^2} = \infty$

51. $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{6}{x} + 1\right)^{x} = e^6$

52. $\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^2 - 5\,x} - \sqrt{x^2 - 6\,x}) = \frac{1}{2}$

53. $\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x} - \sqrt{x^2+x}) = -\infty$

54. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - 4\,x}{3\,x - 4\,x^2} = -\infty$

55. $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2+3\,x+2} = 0$

56. $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{1+x}}{x} = 1$

57. $\lim_{x\to 1} \frac{(x+2)^2 - 9}{1-x} = -6$

58. $\lim_{x\to 1} \left(\frac{7\,x-4}{7\,x-2}\right)^{\frac{x+1}{2}} = \frac{3}{5}$

59. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-x} - 1}{x} = 0$

60. $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{7\,x-4}{7\,x-2}\right)^{\frac{x+1}{2}} = e^{-\frac{1}{7}}$

61. $\lim_{x\to\infty} \frac{6\,x^2 - 3\,x}{\sqrt{x^4-2}} = 6$

62. $\lim_{x\to\infty} x - \frac{3\,(2\,x^3 - 3\,x)}{6\,x^2 - 2} = 0$

63. $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{9\,x^2 + 4\,x - 2} + 3\,x}{2\,x - 1} = 3$

64. $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{1+2x}}{x} = 0$

65. $\lim_{x\to 1} \frac{x^4-1}{1-x^2} = -2$

66. $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+1} - x = 0$

67. $\lim_{x\to 3^-} \frac{3\,x+1}{8\,x-24} = -\infty$

68. $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+x} + x} = \frac{1}{2}$

69. $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} = 1$

70. $\lim_{x\to 1} \left(\frac{4\,x-1}{2\,x+3}\right)^{\frac{x+5}{2}} = \frac{27}{125}$

71. $\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2-4}{x^2+3\,x+2} = 1$

72. $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{9\,x^2 + 4\,x - 2} - 3\,x}{2\,x - 1} = 0$

73. $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x^2+3}}{5 - 3\,x} = \frac{\sqrt{3}}{5}$

74. $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+3\,x} - x}{3\,x+1} = 0$

75. $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{3\,x^2+1}{3\,x^2 - 5\,x + 4}\right)^{x-2} = e^{-\frac{5}{3}}$

76. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+3\,x} - x}{x} = \infty$

77. $\lim_{x\to -2^+} \frac{x^2-4}{x^2+3\,x+2} = 4$

78. $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+7}}{4 - 3\,x} = -\frac{1}{3}$

79. $\lim_{x\to\infty} 1 - \frac{x^2-4}{x^2+3\,x+2} = 0$

80. $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x^2+7\,x-2} - x + 1 = \frac{9}{2}$

81. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{5\,x+1}{5\,x+3}\right)^{x+1} = e^{-\frac{2}{5}}$

82. El área de un triángulo rectángulo es 20 cm^2. Escribir la función que nos da la altura en función de la base. Representarla gráficamente. Buscar dos puntos de esta gráfica y dibujar el triángulo en cada caso.

    Solución: $y = 40/x$

83. Representar gráficamente: $f(x) = \dfrac{8-2x}{3x+6}$

84. Representar gráficamente: $f(x) = 5 + \dfrac{2}{3x}$

85. Representar gráficamente: $f(x) = 5 + \dfrac{5}{2-x} + 1$

86. Representar gráficamente: $f(x) = 5 + \dfrac{4-2x}{15+3x}$

87. Hallar el valor del parámetro a para que la función siguiente sea continua

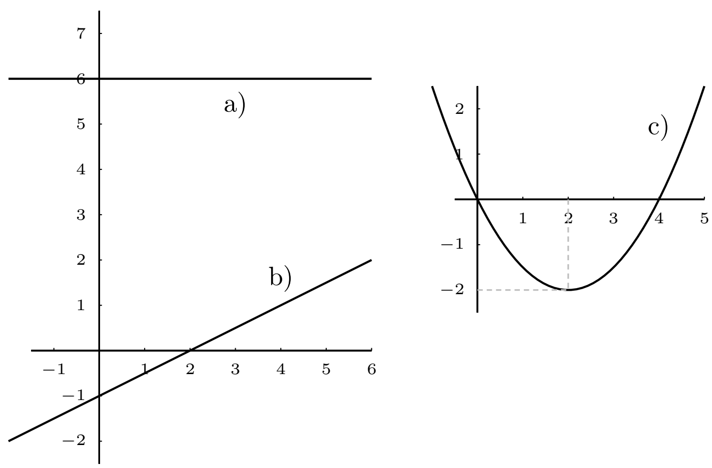
    $$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 2 & si \quad x < 1 \\ 5 + ax & si \quad x \geq 1 \end{cases}$$

    Solución: $a = -4$

88. Hallar a y b en la hipérbola $f(x) = \dfrac{a+3x}{bx-7}$ sabiendo que tiene una asíntota horizontal $y = \dfrac{1}{2}$, y corta al eje de abcisas en $x = 4$

    Solución: $f(x) = \dfrac{3x-12}{6x-7}$

89. Asociar a cada una de estas gráficas su expresión matemática:



    Solución: I) $y = 6$, II) $y = \frac{x-2}{2}$, III) $y = x^2/2 - 2x$

90. Hallar a para que sea continua la función y representar gráficamente

    $$f(x) = \begin{cases} -x^2 + x + a & si \quad x \leq 2 \\ -x + 2 & si \quad 2 < x \end{cases}$$

    Solución: $a = 2$

91. Calcular:

    $$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2-3}{x+5} - x - 7\right);$$

    Solución: -12

Capítulo 9

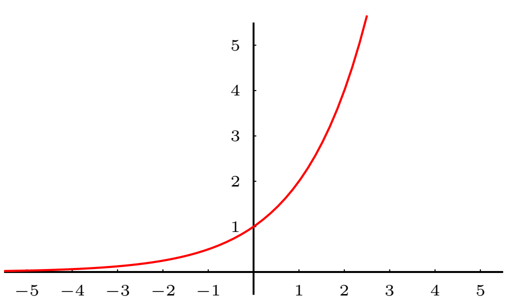
FUNCIONES TRASCENDENTES

Hasta ahora hemos visto funciones algebraicas que son las que resultan de operaciones con polinomios: productos, cocientes, raíces, etc. Veremos ahora funciones trascendentes.

9.1. Función exponencial y función logarítmica

Función exponencial Es la función en la que la variable independiente hace el papel de exponente de una potencia cuya base es un número mayor que 0.

Por ejemplo $y = 2^x$,



$y = a^x$ con $a > 1$

Es creciente.

Es continua e inyectiva (originales distintos dan imágenes distintas).

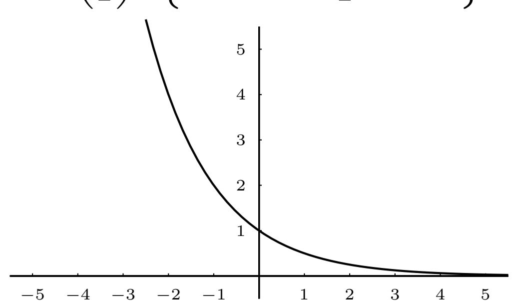
El dominio son todos los números reales.

El rango son todos los números reales positivos sin el 0.

límite cuando x tiende a $-\infty$ es 0.

límite cuando x tiende a ∞ es ∞ .

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x \left\{= (0'5)^x = \frac{1}{2^x} = 2^{-x}\right\}$$



$y = a^x$ con $a < 1$

Es decreciente.

Es continua e inyectiva.

El dominio son todos los números reales.

El rango son todos los números reales positivos sin el 0.

límite cuando x tiende a $-\infty$ es ∞

límite cuando x tiende a ∞ es 0

Observaciones: 1) No hay que confundir la función exponencial con la función potencial. En la función exponencial la base es constante y el exponente variable, por ejemplo 2^x, y en la función potencial es al contrario, la base es variable y el exponente constante, por ejemplo x^2. (También existe la función potencio-exponencial x^x)

2) La función exponencial más famosa es e^x.

3) En la práctica se dice que un fenómeno sigue una función exponencial si viene dado por una función del tipo $y = a + b.e^{cx}$

Ejemplo: Resolver la ecuación: $3^{1-x^2} = \dfrac{1}{27}$

$3^{1-x^2} = \dfrac{1}{3^3}$; $\quad 3^{1-x^2} = 3^{-3}$; igualando exponentes $1 - x^2 = -3$; $\quad x = \pm 2$

Hay que comprobar las soluciones en el enunciado. En este caso las dos son válidas. El método consiste en igualar los exponentes una vez igualadas las bases.

Función logarítmica La función logarítmica es la inversa de la función exponencial. Su gráfica es por tanto simétrica respecto a la bisectriz del primer cuadrante.

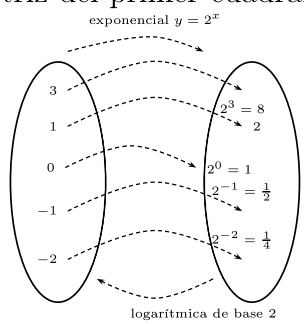
Ejemplo: para la función exponencial $y = 2^x$:

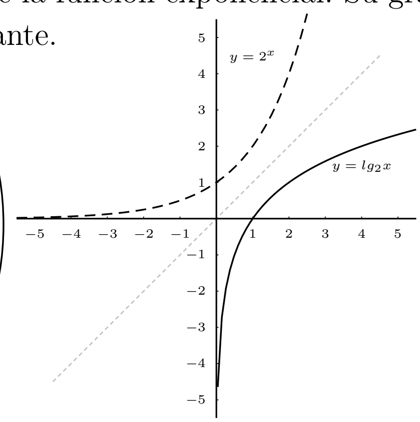
$y = 2^x$

x	0	1	2	3	-1	-2
y	1	2	4	8	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

$y = \log_2 x$

x	1	2	4	8	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
y	0	1	2	3	-1	-2





Por ejemplo $\log_2 x$, el logaritmo en base 2 de x es el número al que hay que elevar la base 2 para obtener x.

Función logarítmica $y = \log_a x$. Se suele considerar siempre $a > 1$, o sea, logaritmos en base mayor que 1.

Características :

Dominio R^+ sin 0

Rango R

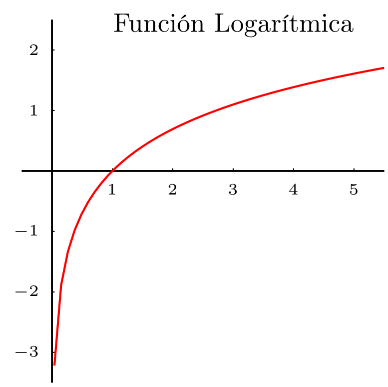
Continua

Inyectiva creciente

$\log_a 1 = 0$

El límite cuando x tiende a 0 de $\log_a x$ es $-\infty$

El límite cuando x tiende a ∞ de $\log_a x$ es ∞



Observaciones: 1) Los logaritmos más famosos son: a) los logaritmos decimales, en base 10, log; los logaritmos neperianos, en base e: ln.

2) Como vemos en la primera característica, no existe logaritmo de un número negativo.

3) En la práctica se dice que un fenómeno sigue una función logarítmica si viene dado por una función del tipo $y = a + b. \ln cx$

Hallar la parte entera de un logaritmo decimal: Se trata de encajar el número entre dos potencias seguidas de 10.

1) Hallar la parte entera de $\log 237$

$$\begin{array}{ccccc} 100 & < & 237 & < & 1000 \\ +2 & & & & +3 \end{array} \quad \text{La parte entera de } \log 237 \text{ es } 2$$

Cuando el número es positivo el logaritmo decimal es el número de cifras menos uno.

2) Hallar la parte entera de $\log 0'015$

$$\begin{array}{ccccc} 0'01 & < & 0'015 & < & 0'1 \\ -2 & & & & -1 \end{array} \quad \text{La parte entera de } \log 0'015 \text{ es } -1$$

Cálculo con logaritmos: Definición: El logaritmo en base a de un número x: $\log_a x$ es el exponente al que hay que elevar la base a para obtener el número x.

Propiedades de los logaritmos:

1. $\log_a a = 1, \quad \ln e = 1, \quad \log 10 = 1$ El logaritmo de la base es 1.
2. $\log_a 1 = 0$. El logaritmo de 1 es 0.
3. No existen logaritmos de números negativos.
4. No existe logaritmo de 0. Por abuso de lenguaje se suele decir que $\log_a 0 = -\infty$
5. $\log_a x^t = t.\log_a x$: el logaritmo de una potencia es igual al exponente por el logaritmo de la base.
6. Los logaritmos en bases distintas son proporcionales, solo difieren en una constante multiplicativa: $\log_b x = \log_b a.\log_a x$.

   Por ejemplo:

   $\log x = \log e \cdot \ln x = 0'4342 \cdot \ln x$

Ejemplos

1. Hallar la inversa de $y = 7 - 3e^{6x+1}$

   $$x = 7 - 3e^{6y+1}; \quad 3e^{6y+1} = 7 - x; \quad e^{6y+1} = \frac{7-x}{3}; \quad \ln e^{6y+1} = \ln \frac{7-x}{3};$$

   $$(6y+1)\ln e = \ln \frac{7-x}{3}; \quad 6y + 1 = \ln \frac{7-x}{3}; \quad 6y = \ln \frac{7-x}{3} - 1; \quad y = \frac{\ln \frac{7-x}{3} - 1}{6}$$

2. Hallar la inversa de $y = \dfrac{\ln(3x+2)+7}{2}$

   $$x = \frac{\ln(3y+2)+7}{2}; \quad 2x = \ln(3y+2) + 7; \quad 2x - 7 = \ln(3y+2); \quad e^{\ln(3y+2)} = e^{2x-7};$$

   $$3y + 2 = e^{2x-7}; \quad 3y = e^{2x-7} - 2; \quad y = \frac{e^{2x-7} - 2}{3}$$

3. Resolver la ecuación: $\log(x^2-5x+5)=\log(x-3)$

   Igualando lo de dentro del logaritmo: $x^2-5x+5=x-3$; $x^2-6x+8=0$; $x=\dfrac{3\pm\sqrt{9-8}}{1}=3\pm1=\begin{cases}4\\ 2 \text{ que no sirve}\end{cases}$

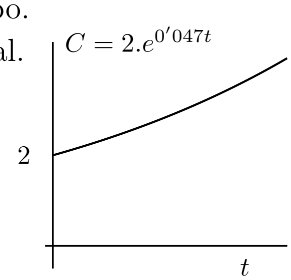
4. $\ln(x^2+3x+5)=0$

   $\ln(x^2+3x+5)=0$; $\ln(x^2+3x+5)=\ln 1$; $x^2+3x+5=1$; $x^2+3x+4=0$;

   $x=\dfrac{-3\pm\sqrt{9-16}}{2}$ que no tiene solución.

5. Sabiendo que si la capitalización es continua, C_0 euros durante t años, a un interés del $R\,\%$ anual, dan como capital final C : $C=C_0.e^{it}$ con $i=\dfrac{R}{100}$.

   Para un capital inicial de dos millones de euros, a un interés anual del 4’7 % :
   a) Representar el capital acumulado en función del tiempo.
   b) Hallar el tiempo que tarda en doblarse el capital inicial.

   a) $C=2.e^{0'047t}$
   b) $4=2.e^{0'047t}$
   $2=e^{0'047t}$ tomando logaritmos: $\ln 2=0'047.t.\ln e$
   $t=\dfrac{\ln 2}{0'047}=14'747$ años $\approx$ 14 años y 9 meses

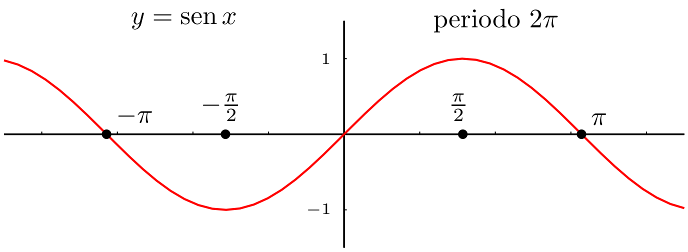
9.2. Funciones circulares

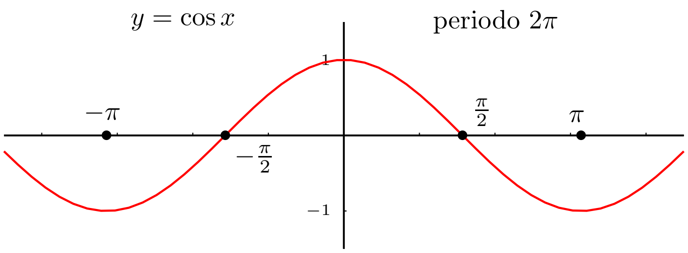
Razones de ángulos notables

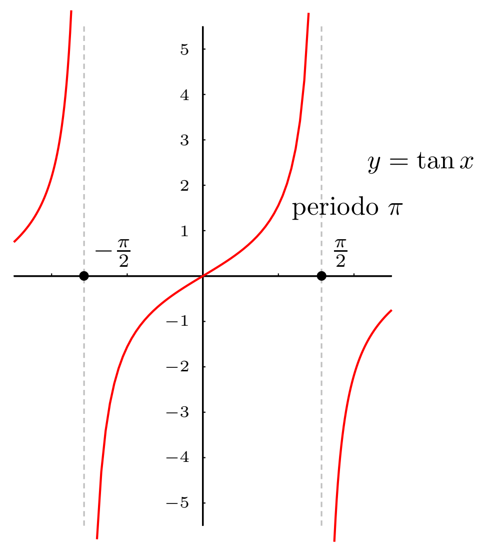
Radianes	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$
Grados	0^0	90^0	180^0	270^0	30^0	60^0	45^0
Seno	0	1	0	-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
Coseno	1	0	-1	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
Tangente	0	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	1

nota: es frecuente escribir $\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

En la circunferencia unidad un arco de un radián tiene longitud 1, de esta forma a la longitud x le podemos asociar un arco de x radianes. Entonces podemos hablar por ejemplo de seno de x siendo x una longitud. Resultan así las funciones circulares:

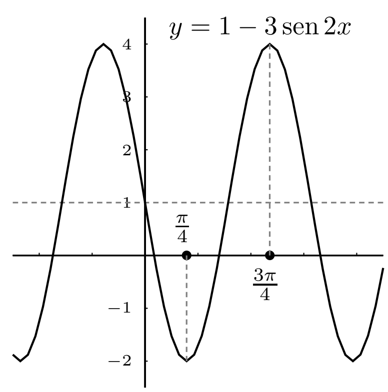






Ejemplo Representar $y = 1 - 3.\operatorname{sen} 2x$

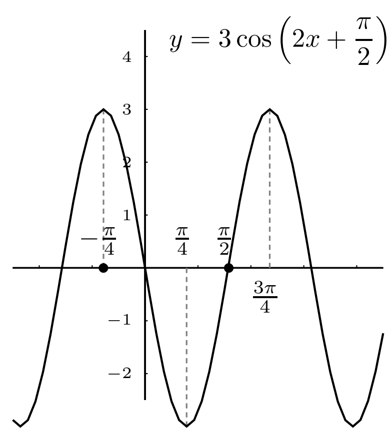
	x	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π
comienzo:	$2x$	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
	$\operatorname{sen} 2x$	0	1	0	-1	0
	$3\operatorname{sen} 2x$	0	3	0	-3	0
	$y = 1 - 3\operatorname{sen} 2x$	1	-2	1	4	1



el período de $y = 1 - 3.\operatorname{sen} 2x$ es π

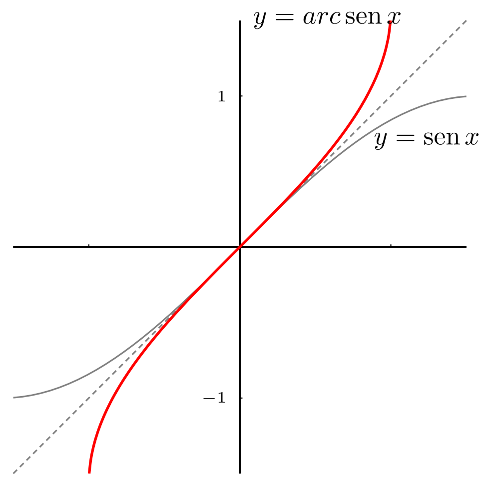
Ejemplo Representar $y = 3\cos\left(2x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

	x	$-\pi/4$	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$
comienzo:	$2x + \pi/2$	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
	$\cos(2x + \pi/2)$	1	0	-1	0	1
	$y = 3\cos(2x + \pi/2)$	3	0	-3	0	3



9.3. Funciones circulares inversas

Restringiendo el dominio de $y = \operatorname{sen} x$ al intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$, representar su función inversa arco seno: $y = ar\operatorname{sen} x$
(por ejemplo, $ar\operatorname{sen}\frac{1}{2} = \pi/6$, se lee "el arco cuyo seno vale $\frac{1}{2}$ es $\pi/6$")
Representamos $ar\operatorname{sen}$ basándonos en que las gráficas de funciones inversas son simétricas respecto a la bisectriz del primer cuadrante:
dominio del $ar\operatorname{sen}$ es $[-1, 1]$ rango del $ar\operatorname{sen}$ es $[-\pi/2, \pi/2]$

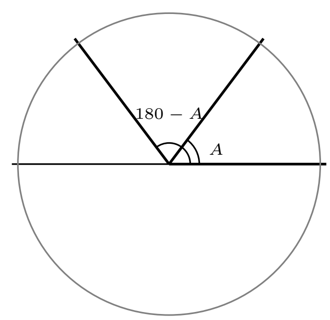


9.4. Resolución de ecuaciones trigonométricas

Ejemplos

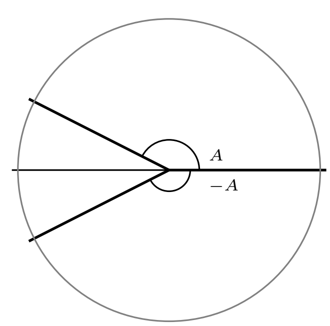
1. Resolver $\operatorname{sen} x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

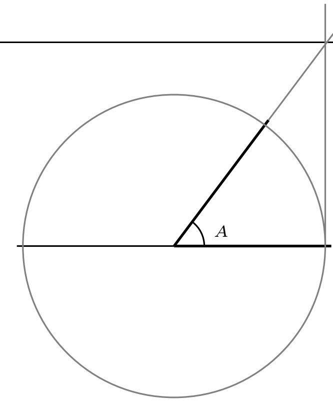
   $\operatorname{sen} x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$,como $x = 45^0 = \dfrac{\pi}{4}$ es solución, buscamos la otra en la circunferencia trigonométrica: $x = \pi - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{4}$;
   ahora expresamos la solución general añadiendo las vueltas por ser periódica: $\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \end{array} \right. ; k \in Z$



2. $\cos x = \dfrac{-\sqrt{3}}{2}$

   $\cos x = \dfrac{-\sqrt{3}}{2}$, luego $x = \pi - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{5\pi}{6}$ es solución, buscamos la otra en la circunferencia trigonométrica: $x = \dfrac{-5\pi}{6}$;
   ahora expresamos la solución general añadiendo las vueltas por ser periódica: $\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \end{array} \right. ; k \in Z$





3. $\tan x = \sqrt{3}$
   $\tan x = \sqrt{3} \quad x = \dfrac{\pi}{3}$ falta añadir medias vueltas pues ahora el período es π
   $x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi; k \in Z$

Ejemplo (Optativo) Resolver la siguiente ecuación: $\operatorname{sen} 3x = \operatorname{sen} x$. Dar las soluciones entre 0 y $3\pi/2$.

$3x = x + 2k\pi; \quad x = k\pi, k \in Z$, primer grupo de soluciones.

$3x = (\pi - x) + 2k\pi; 4x = \pi + 2k\pi; \quad x = \pi/4 + k\pi/2; k \in Z$ segundo grupo de soluciones.

Las soluciones entre 0 y $3\pi/2$ son: $0, \pi, \pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4$.

9.5. Problemas

1. Hallar el exponente al que hay que elevar 7 para obtener $\sqrt[3]{2401}$

2. Hallar la gráfica de la función $y = \log_3 x$, sabiendo que es la función inversa de $y = 3^x$. Deducir sus características: dominio, crecimiento, etc.

3. Calcular los siguientes logaritmos:

   a) $\log_2 64$; b) $\log_3 81$; c) $\log 100{,}000{,}000$; d) $\log_2 0'125$; e) $\log_2 2^4$; f) $\log 0'00000000001$; g) $\log_3 \frac{1}{3}$; h) $\log_2 0'5$; i) $\log_2 \sqrt{2}$; j) $\ln e^{x-1}$ k) $\ln 1/e$

   Solución: a) 6, b) 4, c) 8, d) -3, e) 4, f) -11, g) -1, h) -1, i) $1/2$, j) $x-1$, k) -1

4. Resolver la siguiente ecuación: $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{3x-4} = 32$

   Solución: $x = -1/3$

5. Resolver la siguiente ecuación: $a^{x^2+x-2} = 1$ siendo $a > 0$

6. Resolver la siguiente ecuación: $1024 = \dfrac{1}{2^{4x}}$

   Solución: $x = -2'5$

7. Resolver la siguiente ecuación: $2^{x^2-11} = 4$

   Solución: $x = \pm\sqrt{13}$

8. Calcular la parte entera de los logaritmos siguientes a) $\log 238$; b) $\log 125'4$; c) $\log 2'5$; d) $\log 0'75$; e) $\log 0'005$; f) $\log 10^6$

9. Hallar la inversa de $y = e^{1-x} + 1$

   Solución: $y = 1 - \ln(x-1))$

10. Hallar la inversa de $y = \ln x + 4$

    Solución: $y = e^{x-4}$

11. Hallar la inversa de $y = \ln\sqrt{3x-2}$

    Solución: $y = \dfrac{e^{x^2}+2}{3}$

12. Resolver las ecuaciones:

    a) $\log_{25} x = \frac{1}{2}$; b) $\log_4 8 = x$; c) $\log_x 2 = 0'25$

    Solución: a) $x = 5$, b) $x = 3/2$ c) $x = 16$

13. Resolver las ecuaciones: a) $\log_3 x = 0$; b) $\log_2 0 = x$; c) $\log_2 = 7$; e) $\log_x 125 = 3$

    Solución: a) $x = 1$, b) "$x = -\infty$ " c) $x = 128$, d) $x = 5$

14. Resolver la siguiente ecuación:

    $\ln(x^2 + 3x + 2) = 0$

    Solución: $-0'385, -2'615$

15. Resolver la siguiente ecuación:

    $\ln(2x^2 - 4) = 2$

    Solución: $\pm 2'38$

16. ¿Qué relación hay entre el logaritmo de un número n y el de su recíproco $1/n$?

17. ¿Qué relación hay entre $\log a$, $\log b$ y el logaritmo del producto $\log(a \cdot b)$ y el cociente $\log \frac{a}{b}$?

18. Una empresa de componentes electrónicos sacó al mercado un nuevo microprocesador. La proporción P de fabricantes de ordenadores que lo utilizan al cabo de t años es $P = \dfrac{1}{1 + C.e^{kt}}$. En el instante $t = 0$, sólo lo utilizaban el 2 %. Suponiendo que hoy, a cuatro años de su aparición, lo usan ya el 50 % de los fabricantes, calcúlense las constantes C y k. Después, averígüese cuánto tiempo debería transcurrir para que lo usaran el 90 % de los fabricantes.

Solución: $C = 49, k = -0'9729$ 6 años y 3 meses

19. La fórmula $P(t) = P_0 e^{kt}$ expresa el valor de la población $P(t)$ al cabo de t años, para una ciudad, con una tasa anual de crecimiento K, constante. a) ¿Qué significado tiene P_0? b) En 1.985, dos ciudades A y B poseian 18'8 y 17'3 millones de habitantes respectivamente. Para el año 2.000, si se mantienen las tasas anuales de crecimiento de ambas ciudades, se estima que tendrán 20'2 y 25'8 millones de habitantes respectivamente. Hallar las tasas de crecimiento de las ciudades A y B, y calcular el año en que las dos ciudades tendrán la misma población.

    Solución: a) P_0 población inicial, b) ciudad A: $P(15) = 18'8.e^{15k_A} = 20'2$, $15.k_A = \ln \frac{20'2}{18'8}, k_A = 0'0047$, de igual modo $k_B = 0'026$, las poblaciones serán iguales para $t = 3'81$

20. Representar $y = \cos 2x$

21. Representar $y = 2 \operatorname{sen} 3x$

22. Encontrar los valores de x para los que es máxima la función $y = 2\cos 2x$.

    Solución: $x = 0, 2\pi, 4\pi, \dots, -2\pi, -4\pi, \dots = k\pi;\ k \in Z$

    Representar:

23. $y = 3 - 2\cos x$

24. $y = \tan 3x$

25. $y = 4 - 2\operatorname{sen}(x/2)$

26. Representado $y = \cos x$ en el intervalo $[0, \pi]$, hallar la gráfica de $y = ar\cos x$. Dando el dominio y el rango.

27. Encontrar los valores de x para los que es mínima la función $y = -5\cos 2x$.

    Solución: $x = k\pi, k \in Z$

28. Resolver a) $\operatorname{sen} x = -1/2$; b) $\cos x = \sqrt{3}/2$; c) $\tan x = 1$

    Solución:

    a) $\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{array} \right. ; k \in Z$

    b) $\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{array} \right. ; k \in Z$

    c) $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi; k \in Z$

29. Resolver a) $\operatorname{sen} x = 0'385$; b) $\cos x = -1$; c) $\tan x = 0$; d) $\operatorname{sen} x = -\sqrt{3}/2$; e) $\cos x = \sqrt{1/2}$; f) $\tan x = -\sqrt{3}/3$

    Solución:

    a) $\left\{ \begin{array}{l} x = 0'3952 + 2k\pi \\ x = \pi - 0'3952 + 2k\pi \end{array} \right. ; k \in Z$

    b) $x = \pi + 2k\pi; k \in Z$

    c) $x = 0 + k\pi; k \in Z$

    d) $\left\{ \begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \end{array} \right. ; k \in Z$

    e) $\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{array} \right. ; k \in Z$

    f) $x = -\dfrac{\pi}{6} + k\pi; k \in Z$

30. Resolver a) $\operatorname{sen} 2x = 1/2$; b) $\cos 6x = \cos(3x - 5)$; c) $\tan 2x = \tan(1 - x)$

    Solución: a) $\frac{\pi}{12} + \pi k, \frac{5\pi}{12} + \pi k$ b) $\frac{2k\pi}{3} - \frac{5}{3}, \frac{2k\pi}{9} - \frac{5}{9}$ c) $\frac{1+k\pi}{3}$

31. Calcular dando valores:

    a) $\displaystyle \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{x} =$

    b) $\displaystyle \lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x} =$

    c) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} =$

    d) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} =$

    e) $\displaystyle \lim_{x \to \infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} =$

32. Representar y hallar los puntos de corte de $y = \operatorname{sen} x$; $y = \operatorname{sen}(2x)$.

Capítulo 10

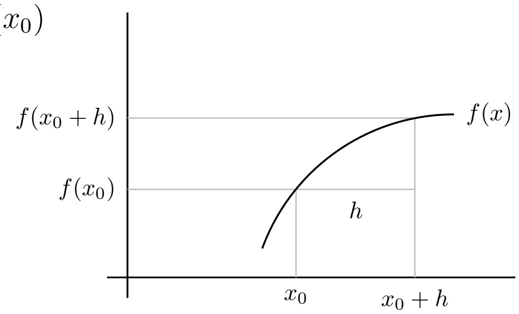
DERIVADAS.

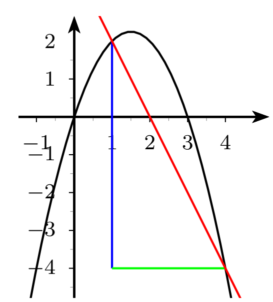
10.1. Tasa de variación media de una función

Se llama tasa de variación media (T.V.M.) en un intervalo al cociente entre el incremento de la función: $f(x_0+h)-f(x_0)$ y el incremento de la variable: h.
Intervalo: $[x_0, x_0+h]$
incremento de la variable: h
incremento de la función: $f(x_0+h)-f(x_0)$

T.V.M. $= \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

La T.V.M. es la pendiente de la recta secante





Ejemplo: Hallar la tasa de variación media de la función $y = 3x - x^2$ en el intervalo $[1,4]$. Hacer representación gráfica.

$$\text{T.V.M.} = \frac{f(4)-f(1)}{4-1} = \left\{ \begin{array}{l} f(4) = 3\cdot 4 - 4^2 = -4 \\ f(1) = 3\cdot 1 - 1^2 = 2 \end{array} \right\} = \frac{-4-2}{3} = -2$$

10.2. Derivada de una función en un punto

Sea una función real $f(x)$ definida en el dominio D, subconjunto de R. Se define derivada de la función $f(x)$ en el punto $x_0 \in D$ como:

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}$$

cuando este límite es un número.

Ejemplos Veamos si las funciones siguientes son derivables en los puntos que se indican

1. $y = x^2 + 3$ en $x_0 = 5$

$$f'(5) = \lim_{h\to 0} \frac{f(5+h) - f(5)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(5+h)^2 + 3 - (5^2+3)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 + 10h}{h} = 10$$

2. $y = \dfrac{1}{x+2}$ en $x_0 = 3$

$$f'(3) = \lim_{h\to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{3+h+2} - \frac{1}{3+2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-h}{h(5+h)5} = \frac{-1}{25}$$

10.3. Interpretación gráfica de la derivada

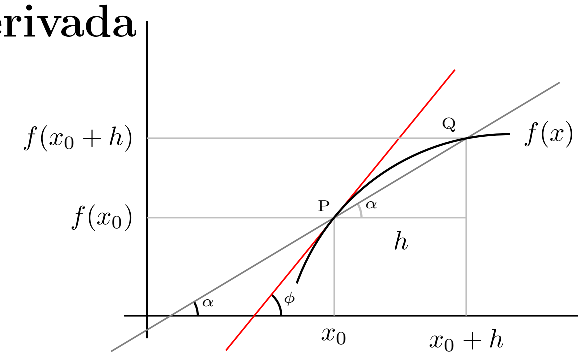
Llamando a h incremento de x

$f(x_0+h) - f(x_0)$ incremento de y, resulta:

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \tan\alpha$$

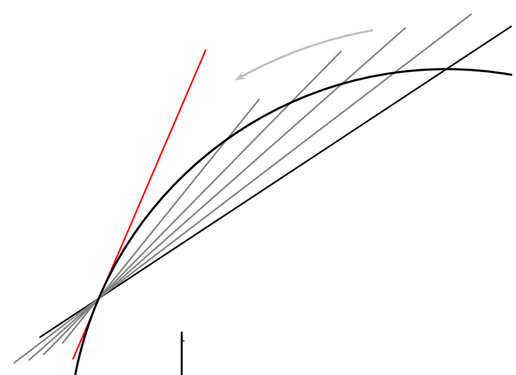
cuando $h \to 0$ la recta secante PQ tiende a la recta tangente en x_0 y los ángulos α tienden al ángulo ϕ, se tiene:

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{\alpha\to\phi} \tan\alpha = \tan\phi = m$$



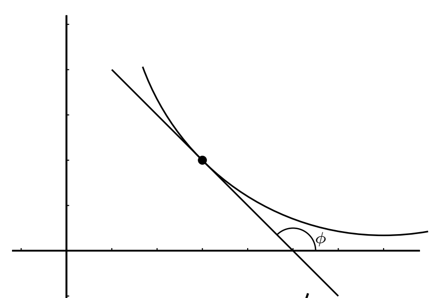
Se llama pendiente de una recta a la tangente del ángulo que forma con el eje de las x positivas. Por tanto:

La derivada de una función en un punto es la pendiente de la recta tangente en ese punto.



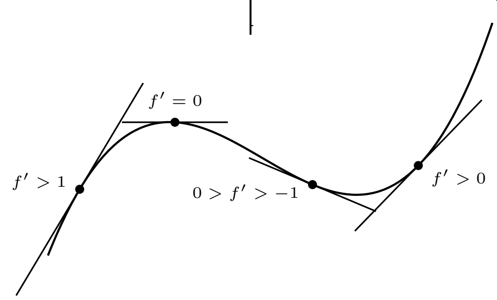
Por tanto la derivada de una función en un punto dice como crece una función y lo hace midiendo la inclinación de la recta tangente pues la derivada es la pendiente de la recta tangente.

$$f'(x_0) = \tan\phi = m$$



Según la derivada sea positiva o negativa la función sube o baja.

Cuanto mayor es la derivada en valor absoluto más vertical es la gráfica.

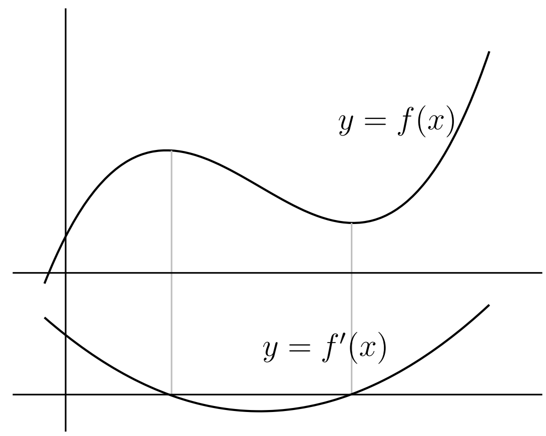


10.4. Función derivada

Si una función $y = f(x)$ definida en un dominio D tiene derivada en cada punto de D resulta una función que se llama función derivada y se representa $y' = f'(x)$

También se representa la función derivada por

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} f(x) = [f(x)]'$$



Ejemplo Hallar la derivadas de las funciones:

1) $y = x^2 + 3$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 + 3 - (x^2 + 3)}{h} = 2x$$

$y' = 2x$ es la función derivada de $y = x^2 + 3$

2) $y = \dfrac{1}{x-2}$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{x+h-2} - \frac{1}{x-2}}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{-h}{h(x^2 - 4x + 4 + hx - 2h)} = \frac{-1}{x^2 - 4x + 4} = \frac{-1}{(x-2)^2}$$

10.5. Interpretación física de la derivada

Por ejemplo la velocidad es el ritmo de cambio del espacio con respecto al tiempo: $v(t) = \dfrac{\text{de}}{\text{dt}}$.

La aceleración es el ritmo de cambio de la velocidad con respecto al tiempo: $a(t) = \dfrac{\text{dv}}{\text{dt}}$

10.6. Cuadro de derivadas

Reglas de derivación:

$(c)' = 0$	la derivada de una constante es 0
$(x^n)' = n.x^{n-1}$	para derivar una potencia se baja el exponente y se le resta una unidad. En particular: $(x)' = 1$; $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ la derivada de una raíz es 1 partido por dos veces la raíz; $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = \dfrac{-1}{x^2}$
$(f+g)' = f' + g'$	la derivada de la suma es la suma de las derivadas
$(f.g)' = f'g + fg'$	la derivada de un producto es la derivada del 1^0 por el 2^0 más el 1^0 por la derivada del 2^0

$(c.f)' = c.f'$ la derivada de una constante por una función es la constante por la derivada de la función

$\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$ la derivada de un cociente es la derivada del numerador por el denominador menos el numerador por la derivada del denominador, partido por el denominador al cuadrado

$(g[f(x)]' = g'[f(x)].f'(x)$ la derivada de la función compuesta, función de función, es la derivada de la exterior en la interior, por la derivada de la interior.

Derivadas de funciones elementales:

$(e^x)' = e^x$

$(a^x)' = a^x.La$

$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x.\ln a}$

$(\operatorname{sen} x)' = \cos x$

$(\cos x)' = -\operatorname{sen} x$

$(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

$(\cot x)' = \dfrac{-1}{\operatorname{sen}^2 x}$

$(arc \operatorname{sen} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(arc \cos x)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(arc \tan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

Ejemplos

1. $y = x^2; \quad y' = 2x$
2. $y = 2x^3; \quad y' = 6x^2$
3. $y = 3x^4 - 2x; \quad y' = 12x^3 - 2$
4. $y = (x^2-3)(2x+3x^5); \quad y' = 2x(2x+3x^5) + (x^2-3)(2+15x^4)$
5. $y = \dfrac{2x-3x^5}{7x-5}; \quad y' = \dfrac{(2-15x^4)(7x-5)-(2x-3x^5)7}{(7x-5)^2}$
6. $y = \sqrt{x}$; poniendo $y = x^{1/2}$ resulta: $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
7. $y = \sqrt[3]{x}$; poniendo: $y = x^{1/3}$ resulta: $y' = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$
8. $y = \dfrac{5x^4 - 3\sqrt{x}}{1-x}; \quad y' = \dfrac{(20x^3 - \frac{3}{2\sqrt{x}})(1-x) - (5x^4 - 3\sqrt{x})(-1)}{(1-x)^2}$
9. $y = \cos(x^2-3x); \quad y' = -[\operatorname{sen}(x^2-3x)](2x-3) = -(2x-3)\operatorname{sen}(x^2-3x)$
10. $y = 7\cos(2x-5); \quad y' = -14\operatorname{sen}(2x-5)$

11. $y = 2e^{x-x^2}; \quad y' = 2(1-2x)e^{x-x^2}$

12. $y = (2x^3+5x-2)^4; \quad y' = 4(2x^3+5x-2)^3.(6x^2+5)$

13. $y = \sqrt{5x+1}; \quad y' = \dfrac{5}{2\sqrt{5x+1}}$

14. $y = \ln(x^2+1); \quad y' = \dfrac{2x}{x^2+1}$

15. Derivar simplificando $y = \dfrac{2x+1}{(x+3)^2}; \quad y' = \dfrac{2(x+3)^2-(2x+1)2(x+3)}{(x+3)^4} =$

    dividiendo numerador y denominador por $(x+3)$ $= \dfrac{2x+6-4x-2}{(x+3)^3} = \dfrac{-2x+4}{(x+3)^3}$

16. Derivar simplificando

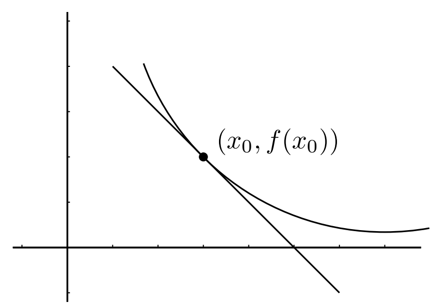
    $y = \left(\dfrac{1-x}{x-1}\right)^3 \quad y' = 3\left(\dfrac{1-x}{x-1}\right)^2.\dfrac{2-(x-1)-(1-x)}{(x-1)^2} = 3\left(\dfrac{1-x}{x-1}\right)^2.\dfrac{0}{(x-1)^2} = 0$

10.7. Recta tangente a una curva

Como la ecuación de una recta que pasa por el punto (x_0, y_0) y tiene de pendiente m es: $y - y_0 = m(x - x_0)$, si queremos calcular la recta tangente a $f(x)$ en el punto x_0, será:

$y_0 = f(x_0)$

$m = f'(x_0)$



Ejemplo Hallar la tangente a la curva $y = x^2 - 5x$ en el punto de abcisa 7.
$f'(x) = 2x - 5, \quad m = f'(7) = 9, \quad f(7) = 14$
Recta tangente $y - 14 = 9(x - 7)$

Integral de una función Integrar es lo contrario de derivar, por ejemplo la función: $y = 2x$ es la derivada de la función $y = x^2 + 7$.

Ejemplo Hallar la función cuya segunda derivada sea $f''(x) = x + 3$ y tiene un mínimo en el punto $(2, 0)$

Como $f''(x) = x + 3$ es la derivada de un polinomio de 2^0 grado que a su vez lo es de uno de grado 3; buscamos una función del tipo: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Derivamos: $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

Derivamos de nuevo: $f''(x) = 6ax + 2b$

Luego: $f''(x) = 6ax + 2b = x + 3$ identificando coeficientes: $\begin{array}{ll} 6a = 1, & a = \dfrac{1}{6} \\ 2b = 3, & b = \dfrac{3}{2} \end{array}$

Sustituimos estos dos valores en f' y f':

$f(x) = \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{3x^2}{2} + cx + d$

$f'(x) = \dfrac{3x^2}{6} + \dfrac{2 \cdot 3x}{2} + c = \dfrac{x^2}{2} + 3x + c$

Ahora imponemos la condición de que tiene un mínimo en $(2, 0)$, lo que se traduce en las condiciones:

- Pasa por $(2,0)$: $\quad f(2) = 0; \quad \dfrac{2^3}{6} + \dfrac{3 \cdot 2^2}{2} + c \cdot 2 + d = \dfrac{4}{3} + 6 + 2c + d = 0$
- En $x = 2$ se anula la derivada: $f'(2) = 0; \quad \dfrac{2^2}{2} + 3 \cdot 2 + c = 2 + 6 + c = 0$, luego $c = -8$

Sustituimos en la anterior:

$\dfrac{4}{3} + 6 + 2(-8) + d = 0; \quad d = 10 - \dfrac{4}{3} = \dfrac{26}{3}$

Luego el polinomio es: $f(x) = \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{3x^2}{2} - 8x + \dfrac{26}{3}$

10.8. Regla de L'Hôpital

En el cálculo de límites, la regla de L'Hôpital resuelve directamente las indeterminaciones $\dfrac{0}{0}, \dfrac{\infty}{\infty}$.

$$\boxed{\lim_{x \to \ldots} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{array}{c} 0/0 \\ \infty/\infty \end{array} = \lim_{x \to \ldots} \frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

Cuando hay indeterminación, el límite del cociente es igual al límite del cociente de las derivadas.

Obsérvese que es el cociente de las derivadas, no la derivada del cociente.

Ejemplos

1. $\displaystyle \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2} = \begin{array}{c} 0/0 \\ \text{L'Hôpital} \end{array} = \lim_{x \to 2} \frac{2x}{2x - 3} = 4$

2. $\displaystyle \lim_{x \to 3} \frac{2x^3 - 8x^2 + 4x + 6}{x^2 - 9} = \begin{array}{c} 0/0 \\ \text{L'Hôpital} \end{array} = \lim_{x \to 3} \frac{6x^2 - 16x + 4}{2x} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$

3. $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = \begin{array}{c} 0/0 \\ \text{L'Hôpital} \end{array} = \lim_{x \to 0} \frac{-\operatorname{sen} x}{2x} = \begin{array}{c} 0/0 \\ \text{L'Hôpital} \end{array} = \lim_{x \to 0} \frac{-\cos x}{2} = \frac{-1}{2}$

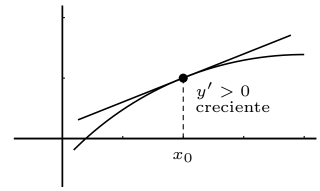
   nota: Es erróneo aplicar L'Hôpital sin que haya indeterminación:

   $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{3x + 5}{x} = \infty$ si se deriva resulta $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{3}{1} = 3$ falso

10.9. Aplicación de la derivada al estudio del crecimiento de una función

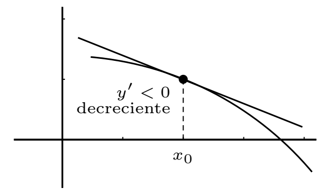
Para estudiar el crecimiento de una función se estudia el signo de la derivada.

Consideremos la función $y = f(x)$ en puntos suficientemente próximos a x_0.



Si $f'(x_0) > 0$ entonces la pendiente de la recta tangente es positiva luego f es CRECIENTE en x_0.

Si $f'(x_0) < 0$ entonces la pendiente de la recta tangente es negativa luego f es DECRECIENTE en x_0



1. $y = 4x^3 - x^2$

   $y' = 12x^2 - 2x = 2x(6x - 1)$ que se anula para $x = 0, x = 1/6$, queremos saber cuando es positiva o negativa y', esos son los los valores que delimitan cambio de signo en la y';

   Probamos por ejemplo los valores de $x : -1, 0'1, 10$

x		0		$\frac{1}{6}$	
y'	$+$		$-$		$+$
y	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

2. $y = e^{x^2-4x}$

   $y' = e^{x^2-4x}(2x - 4)$; la parte exponencial siempre es positiva, la restante se anula para $x = 2$

x		2	
y'	$-$		$+$
y	$\searrow$		$\nearrow$

Con el crecimiento y los puntos de corte se pueden representar las funciones polinómicas:

1. Representar la función polinómica: $y = 12x - x^3$

   Como es un polinomio basta con los puntos de corte y el crecimiento

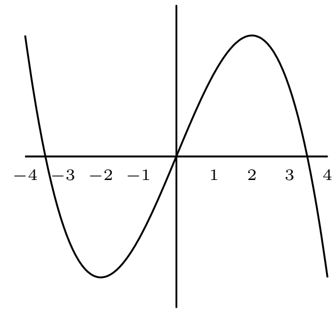
   1. Puntos de corte:

   con $OY : x = 0$, resulta $y = 0$

   con $OX : y = 0$, resulta $x = 0, x = \pm\sqrt{12} = 3'46$

2. Extremos y crecimiento: $y' = 12 - 3x^2$, se anula para $x = -2, x = 2$

x		-2		2	
y'	$-$		$+$		$-$
y	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$



Sustituyendo en la función:
$f(-2) = -16$ "grande negativo", $f(2) = 16$ "grande positivo"

Como ejercicio dibujar la gráfica.

2. Representar la función polinómica: $y = (x^2 - 1)(1 + 2x)^2$

Como es un polinomio basta con los puntos de corte y el crecimiento

Podemos efectuar el producto pero así se pierden factores: $(x^2 - 1)(1 + 2x)^2 = 4x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 4x - 1$

1. Puntos de corte:

con $OY : x = 0$, resulta $y = (-1)(1) = -1$

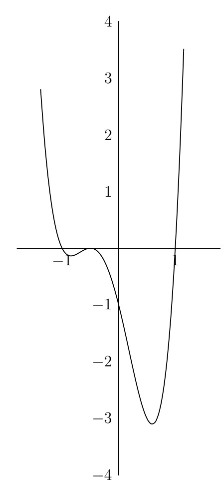
con $OX : y = 0$, resulta $(x^2 - 1)(1 + 2x)^2 = 0$ anulando cada factor:

$x^2 - 1 = 0 \qquad x = \pm 1$

$(1 + 2x)^2 = 0 \qquad x = -\dfrac{1}{2}$ doble

2. Extremos y crecimiento:

$y' = 2x(1 + 2x)^2 + (x^2 - 1)(2(1 + 2x)2 = 2x(1 + 2x)^2 + 4(x^2 - 1)(1 + 2x) =$ sacando factor común $(1 + 2x)[2x(1 + 2x) + 4(x^2 - 1) = (1 + 2x)(2x + 4x^2 + 4x^2 - 4) = (1 + 2x)(8x^2 + 2x - 4)$



que se anula para $x = -\dfrac{1}{2}$ y para:

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 128}}{16} = \frac{-2 \pm \sqrt{132}}{16} = \frac{-2 \pm 11'49}{16} = \begin{cases} x = 0'59 \\ x = -0'84 \end{cases}$$

x		$-0'84$		$-1/2$		$0'59$	
y'	$-$		$+$		$-$		$+$
y	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

3. Representar con los puntos de corte, las asíntotas, el crecimiento y el regionamiento

$y = \dfrac{x + 3}{x^2 - 4x}$

1. Puntos de corte

con $OX : y = 0, \quad \dfrac{x+3}{x^2-4x} = 0, \quad x+3 = 0, \quad x = -3$

con $OY : x = 0$, no hay

2. Asíntotas

Verticales: $x^2 - 4x = 0, \quad x(x-4) = 0, \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$

Horizontal: $y = n; \quad n = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x+3}{x^2-4x} = 0, \quad y = 0$

3. Crecimiento

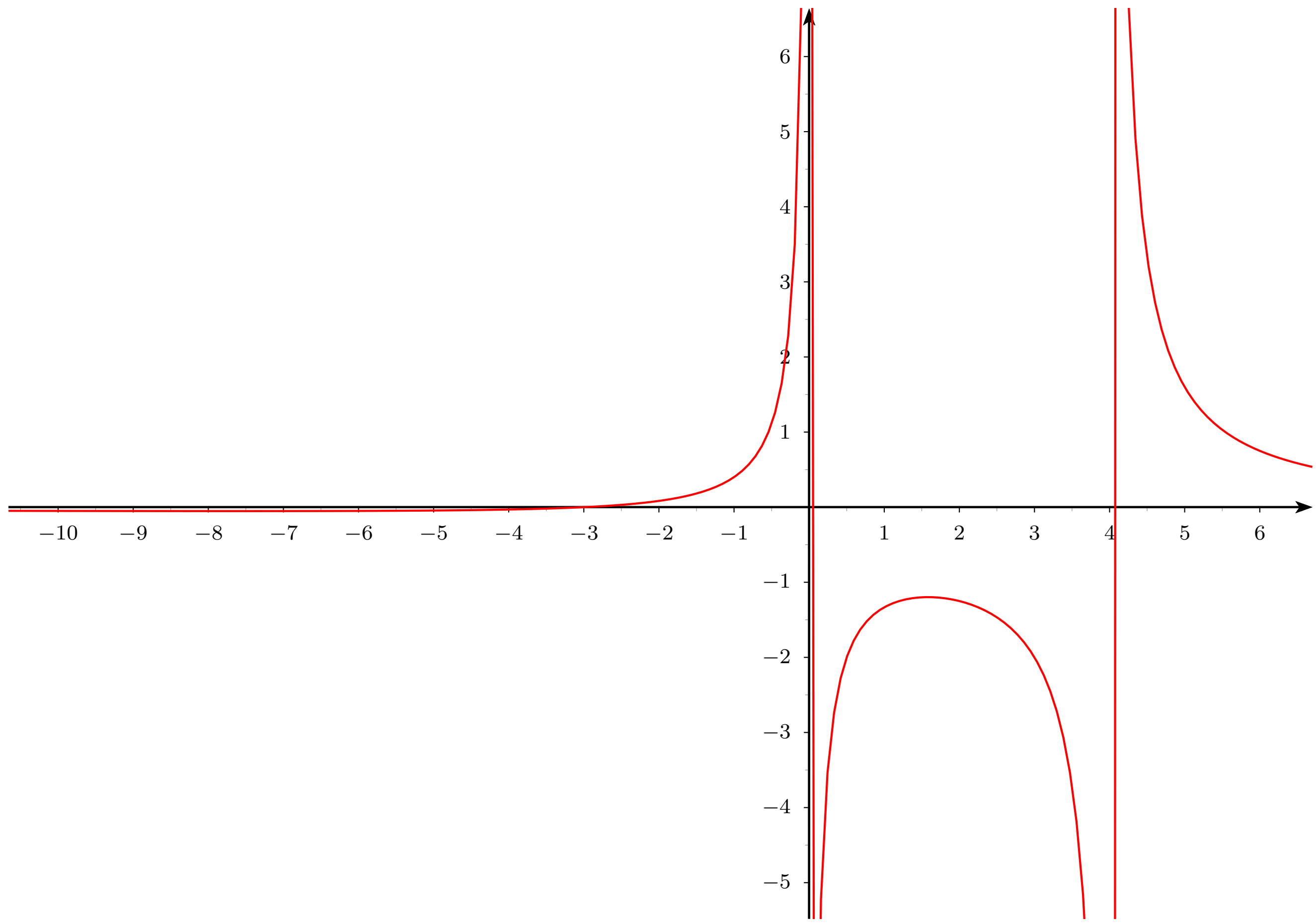
$$y' = \frac{x^2-4x-(2x-4)(x+3)}{(x^2-4x)^2} = \frac{x^2-4x-2x^2-2x+12}{(x^2-4x)^2} = \frac{-x^2-6x+12}{(x^2-4x)^2} = 0, \quad \begin{cases} x = -7'58 \\ x = 1'58 \end{cases}$$

x		$-7'58$		$1'58$	
y'	$-$		$+$		$-$
y	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$
		MIN		MAX	

4. Regionamiento

$y = \dfrac{x+3}{x(x-4)}$

x		-3		0		4	
y	$-$		$+$		$-$		$+$



Ejemplo Hallar la función polinómica de grado 3 que pasa por los puntos $(-2, 0), (1, 0)$ y tiene un máximo en $(-1, 4)$

La función es del tipo $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, para disminuir la incógnitas aplicamos:
Pasa por $(-2, 0)$ luego $f(-2) = 0$ luego es divisible por $(x + 2)$
Pasa por $(1, 0)$ luego $f(1) = 0$ luego es divisible por $(x - 1)$
Luego el polinomio de grado 3 que se busca es $f(x) = (x + 2)(x - 1)(mx + n)$
Máximo en $(-1, 4)$ significa:

- $f(-1) = 4, \quad (-1 + 2)(-1 - 1)(-m + n) = 4, \quad -2(-m + n) = 4; \quad m - n = 2$

- La derivada se anula: $f'(-1) = 0$

  Antes de derivar arreglamos antes la función: $f(x) = (x^2 + x - 2)(mx + n)$

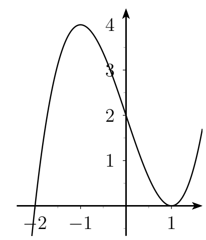
  $f'(x) = (2x + 1)(mx + n) + (x^2 + x - 2)m$

  $f'(-1) = (-2 + 1)(m + n) + (1 - 1 - 2)m = 0$

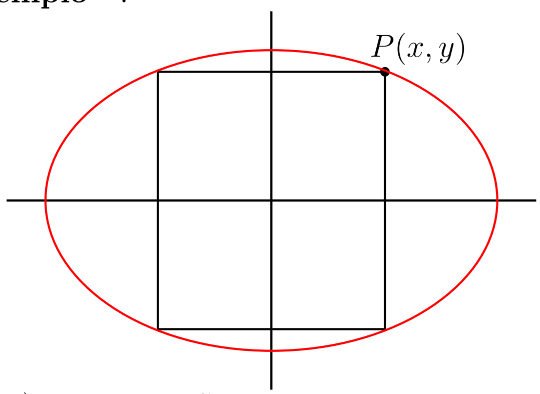
  $-1(-m + n) - 2m = 0; \quad m - n - 2m = 0; \quad -m - n = 0; \quad m + n = 0$

Resolviendo el sistema: $\left\{\begin{array}{l} m-n=2 \\ m+n=0 \end{array}\right.$ $\quad 2a=2; \quad a=1; b=-1$

Luego la función polinómica buscada es $f(x)=(x+2)(x-1)(x-1)=x^3-3x+2$



Ejemplo .



Dada la elipse: $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$

a) Expresar el área del rectángulo inscrito en función de x

b) Representar la función área.

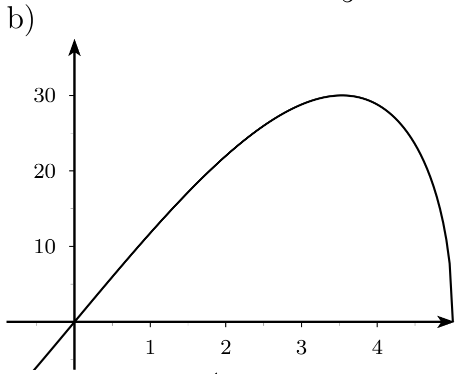
c) Considerando el crecimiento y obtener el rectángulo de área máxima.

a) El área es $S=2x\cdot 2y$

Despejando y en la ecuación de la elipse $y^2=9(1-\dfrac{x^2}{25})=\dfrac{9}{25}(25-x^2)$ luego: $y=\dfrac{3}{5}\sqrt{25-x^2}$.

Por tanto area: $S(x)=\dfrac{12}{5}x\sqrt{25-x^2}$

b)



c) $S'(x)=\dfrac{12}{5}\left(\sqrt{25-x^2}+x\dfrac{-2x}{2\sqrt{25-x^2}}\right)=\dfrac{12}{5}\left(\sqrt{25-x^2}-\dfrac{x^2}{\sqrt{25-x^2}}\right)=\dfrac{12}{5}\left(\dfrac{25-x^2-x^2}{\sqrt{25-x^2}}\right)=\dfrac{12}{5}\left(\dfrac{25-2x^2}{\sqrt{25-x^2}}\right)$

Anulando $S'(x)=0$, resulta $25-2x^2=0$, $\quad x^2=\dfrac{25}{2}$, $\quad x=\pm\dfrac{5}{\sqrt{2}}$

x		$\frac{5}{\sqrt{2}}$	
y'	$+$		$-$
y	$\nearrow$		$\searrow$

El área máxima es para $x=\dfrac{5}{\sqrt{2}}, y=\dfrac{3}{\sqrt{2}}$ y vale $S=30u^2$

10.10. Problemas

1. Aplicando la definición de derivada de una función en un punto, escribe la derivada en $x = 1$ de la función $y = x - 3x^2$

2. Aplicando la definición de derivada de una función en un punto, escribe la derivada en $x = 7$ de la función $y = \dfrac{2}{3-x}$

3. Aplicando la definición de derivada de una función en un punto, escribe la derivada en x = 3 de la función $f(x) = 5x^2 - x + 2$. Hallar la recta tangente en x = 3. Representar gráficamente. Solución: $f'(3) = 29$; $y - 44 = 29(x-3)$

4. Hallar la función derivada de la función del problema anterior aplicando la definición. Solución: $f'(x) = 10x - 1$

5. Aplicando la definición de derivada de una función en un punto, escribe la derivada de $f(x) = \frac{2}{x^2+1}$ en x = 1.

6. Hallar, por la definición la función derivada de la función del problema anterior.

7. Aplicando la definición de derivada de una función en un punto, escribe la derivada $f(x) = \frac{2}{x^2-1}$ en x = 7.

8. La posición de un móvil en función del tiempo es s = 20 + 4t (espacio en metros, tiempo en segundos); calcular utilizando la definición de derivada su velocidad a los 17 segundos, y al cabo de 5 minutos. Hallar la función velocidad instantánea. ¿Qué tipo de movimiento tiene?

   Solución: $s'(17) = 4, s'(300) = 4, s'(t) = 4$, movimiento de velocidad constante uniforme

9. Encontrar, utilizando la definición, la derivada de la función $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ en el punto $(2, \dfrac{2}{5})$.

   Solución: $f'(x) = \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}; f'(2) = -\dfrac{3}{25}$

   En los siguientes el enunciado es "calcular la derivada":

10. $y = 5x^4 - 7x$

11. $y = \dfrac{x^2}{7} - 5\sqrt{x}$

12. $y = \dfrac{7}{x^2} - 7\sqrt[3]{x^2}$

13. $y = (x-3)(4\sqrt{x}+1)$

14. $y = x + 8x^3 - \dfrac{2}{x}$

15. $y = \left(1 - \dfrac{\sqrt{x}}{2}\right) \cdot \left(\dfrac{3}{x^2} - 5\right)$

16. $y = \dfrac{x^2-3}{5}$

17. $f(x) = \dfrac{3x^3+2x-1}{3x^3-x^2+5}$

    Solución:

    $f'(x) = \frac{(9x^2+2)(3x^3-x^2+5)-(3x^3+2x-1)(9x^2-2x)}{(3x^3-x^2+5)^2}$

18. $f(x) = \dfrac{2x^2-3x}{x-4} - 2x$

    Solución: $f'(x) = \frac{(4x-3)(x-4)-(2x^2-3x)}{(x-4)^2} - 2$

19. $f(x) = x.\ln(x+1)$

    Solución: $f'(x) = \ln(x+1) + \frac{x}{x+1}$

20. $f(x) = (arc\cos x)\ln(x+1)$

    Solución:

    $f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.\ln(x+1) + (arc\cos x)\frac{1}{x+1}$

21. $y = \dfrac{1+\pi x}{2}$

22. $f(x) = xe^{2x}$

    Solución: $f'(x) = e^{2x} + 2x.e^{2x}$

23. $f(x) = \operatorname{sen} x. \ln x$

    Solución: $f'(x) = \cos x. \ln x + \frac{\operatorname{sen} x}{x}$

24. $f(x) = \dfrac{x-3}{\sqrt{x^2-x}}$

    Solución: $f'(x) = \frac{\sqrt{x^2-x}-(x-3)\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}}{x^2-x}$

25. $f(x) = (\tan x.log_a x)^2$

    Solución: $f'(x) = 2(\tan x.log_a x)(\frac{1}{\cos^2 x}.log_a x + \tan x.\frac{1}{x.\ln a})$

26. $f(x) = \dfrac{x.\cos x - \operatorname{sen} x}{x^3}$

    Solución:

    $f'(x) = \frac{(\cos x - x.\operatorname{sen} x - \cos x)x^3 - (x.\cos x - \operatorname{sen} x)3x^2}{x^6}$

27. $y = \operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x^2))$

    Solución:

    $y' = \cos[\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x^2)].\cos(\operatorname{sen} x^2).(\cos x^2),2x$

28. $y = (3e+5)^{3x-1}$

    Solución: $y' = (3e+5)^{3x-1},3.\ln(3e+5)$

29. $f(x) = \dfrac{4x^2-5}{x(x^2+1)}$

    Solución: $f'(x) = \frac{8x(x^3+x)-(4x^2-5)(3x^2+1)}{(x^3+x)^2}$

30. $f(x) = \dfrac{\tan x}{x}$

    Solución: $f'(x) = \frac{\frac{1}{\cos^2 x}.x - \tan x}{x^2}$

31. $f(x) = \dfrac{\ln(2x^2)}{x-3}$

    Solución: $f'(x) = \frac{\frac{4x}{2x^2}(x-3)-\ln(2x^2)}{(x-3)^2}$

32. $f(x) = [\ln(2x^2)].\tan(x-3)$

    Solución: $f'(x) = \frac{1}{2x^2},4x.\tan(x-3) + \frac{\ln(2x^2)}{\cos^2(x-3)}$

33. $f(x) = \dfrac{e^{x-1}}{2x^2-3}$

    Solución: $f'(x) = \frac{e^{x-1}(2x^2-3)-e^{x-1},4x}{(2x^2-3)^2}$

34. $y = \dfrac{2\operatorname{sen} x}{2x-1}$

    Solución: $y' = \frac{2\cos x(2x-1)-2(2\operatorname{sen} x)}{(2x-1)^2}$

35. $y = \dfrac{\sqrt{2x^2-3x}}{2x-1}$

    Solución: $y' = \frac{\frac{4x-3}{2\sqrt{2x^2-3x}}(2x-1)-2\sqrt{2x^2-3x}}{(2x-1)^2}$

36. $y = (1/x^2).ar\tan x$

    Solución: $y' = (-2/x^3).ar\tan x + (1/x^2)\frac{1}{1+x^2}$

37. $y = \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \operatorname{sen} x}$

    Solución:

    $y' = \frac{(e^x+e^{-x}-2)(x-\operatorname{sen} x)-(e^x-e^{-x}-2x)(1-\cos x)}{(x-\operatorname{sen} x)^2}$

38. $y = [1+2\cos(x.\cos x)]^2$

    Solución: $y' = 2[1+2\cos(x.\cos x)].(-2\operatorname{sen}(x.\cos x))(\cos x - x.\operatorname{sen} x)$

39. $y = 2\ln x^{2x-1}$

    Solución: $y = 2(2x-1).\ln x, y' = 2[2.\ln x + \frac{2x-1}{x}$

40. Hallar el valor del parámetro a para que la función siguiente sea continua

    $$f(x) = \begin{cases} 4x+a & si \quad x \leq 3 \\ \dfrac{x^2-3x}{9-x^2} & si \quad x > 3 \end{cases}$$

    Solución: $a = -12'5$

41. Hallar la recta tangente a la curva $y = \ln\cos^2 x$ en $x = \dfrac{\pi}{4}$ Solución: $y - \ln 2 = -2(x - \dfrac{\pi}{4}$

42. $y = (3x^2+5)^{3x-1}$

    Solución: $y' = (3x^2+5)^{3x-1}[3.\ln(3x^2+5) + \frac{6x}{3x^2+5}(3x-1)]$

43. $y = (2\operatorname{sen} x)^{2x-1}$

    Solución:

    $y' = (2\operatorname{sen} x)^{2x-1}[2.\ln(2\operatorname{sen} x) + \cot x(2x-1)]$

44. Hallar $f'\left(\sqrt{\frac{\pi}{3}}\right)$, para $f(x) = \operatorname{sen}^2 x^2$

    Solución: $\sqrt{\pi}$

45. La población de una cierta colonia de insectos crece de acuerdo con la fórmula $y = 1000^{t+1} - 1000(t+1)$ donde t es el tiempo en meses e y es el número de individuos de la población. Calcular la velocidad de crecimiento de la población a los doce meses.

    Solución: $\approx 6'9{,}10^{39}$

46. Calcular la derivada de $y = arc\tan\frac{1+x}{1-x} - arc\tan x$ simplificando el resultado al máximo. Interpretar el resultado.

    Solución: 0, es constante

47. Hallar la ecuación de la tangente a la curva $y = \frac{2x^3+9}{4x+1}$ en el punto de abcisa 2.

    Solución: $y - \frac{25}{9} = \frac{116}{81}(x-2)$

48. Hallar la ecuación de la tangente a la curva $y = \frac{x}{1-x^2}$ que forman un ángulo de 45^0 con la parte positiva del eje de abcisas.

    Solución: $y = x, y + \frac{\sqrt{3}}{2} = x + \sqrt{3}, y - \frac{\sqrt{3}}{2} = x - \sqrt{3}$

49. Hallar la recta tangente a la curva $y = x^2 - 3x$ en el punto $x = 1$. Representar gráficamente el problema.

50. Hallar la recta tangente a la curva $y = \ln x$ en el punto $x = e$

    Solución: $y = \frac{x}{e}$

51. Dada la función $y = x^2 - x$, hallar el punto en el que la recta tangente es paralela a la recta $y = 3x - 5$

    Solución: $x = 2$

52. Calcular

    a) $\lim\limits_{x\to -3} \frac{(x^2-x)(x+3)}{x^2+6x+9}$

    b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$

    c) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{3x^2-7x+2}{x^2-4}$

    Solución: a) $12/0 = \pm\infty$, b) 1, c) $5/4$

53. Hallar la ecuación de la curva que pasa por los puntos p(0,3) y Q(-1,4), sabiendo que su derivada segunda es $y'' = 6x - 2$

    Solución: $y = x^3 - x^2 - 3x + 3$

54. Hallar la derivada en $x = 1$ de $y = \frac{e^{2x} - \ln(x+2)}{(x+1)^2}$

    Solución: $y = \frac{2e^2 + 6\ln 3 - \frac{4}{3}}{64}$

55. Hallar un polinomio de tercer grado que tenga una de sus raíces en $x = 4$, la función tenga un mínimo en $(1,0)$ y pasa por $(0,-8)$

    $f(x) = 2(x-1)^2(x-4) = 2x^3 - 12x^2 + 18x - 8;\quad f'(x) = 6x^2 - 24x + 18; [x = 1, x = 3]$

56. La función polinómica $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ pasa por el punto $(-1,0)$ y tiene un máximo en $(0,4)$. Hallar la función.

    Solución: $y = x^3 - 3x^2 + 4$

57. Calcular:

    a) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x}$;

    b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}$;

    c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$;

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x};$$

58. Estudiar el crecimiento y representar:

    $y = (x-1)(x^2 - 4x)$

59. Estudiar el crecimiento y representar:

    $y = 2x^3 - 3x^2 - 8x - 3$

60. Estudiar el crecimiento y representar:

    $y = x^4 - 5x^2 + 4$

61. Estudiar el crecimiento y representar:

    $y = |x^3 - x|$

62. Estudiar el crecimiento y representar:

    $y = (1-x)^2(\frac{x^2}{4} + 2x)$

    Solución: $y = \frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{2} - \frac{15x^2}{4} + 2x$, $y' = x^3 + \frac{9x^2}{2} - \frac{15x}{2} + 2$, max min $x = 0{,}34, x = -5{,}8, x = 1$

63. Estudiar el crecimiento de $y = (1-x)\,e^{x^2-3x}$

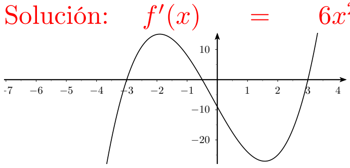
    Solución: $y = (-2x^2 - x + 2)\,e^{x^2-3x}$

64. Hallar la función polinómica de grado 2 que tiene un mínimo en el punto $(2, 7)$ y cuyo coeficiente principal es 1.

    Solución: $y = x^2 - 4x + 11$

65. Representar $y = (x^2 - 9)(1 + 2x)$

    Solución: $f'(x) = 6x^2 + 2x - 18$

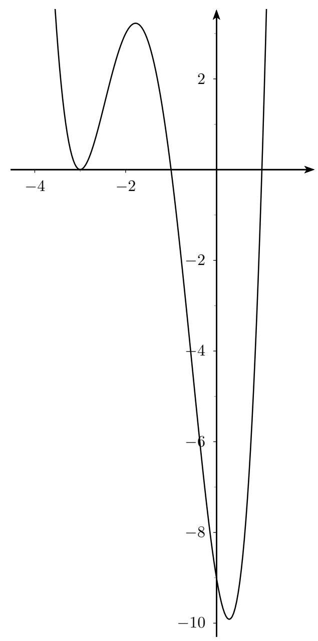
66. Dada la función $y = (x-1)^2(x+2)$. Representar gráficamente la función y la derivada.

67. Hallar la tangente a $y = \tan(-x)$ en $x = \dfrac{\pi}{3}$

    Solución: $y + \sqrt{3} = -4(x - \frac{\pi}{3})$

68. Representar $y = (x^2 - 1)(x+3)^2$

    Solución: $y' = (x+3)(4x^2 + 6x - 2)$

69. Obtener el área de un rectángulo inscrito en una circunferencia de radio 2 en función de la base x del rectángulo.

    Representar la función área obtenida y deducir de su derivada dónde es creciente o decreciente, y ya puestos decir cuál es el rectángulo de área máxima inscrito en dicha circunferencia.

    Solución: $S(x) = x\sqrt{16 - x^2}$

    En los siguientes problemas el enunciado es:

    Dada la función. Hallar:

    a) Puntos de corte con los ejes.

    b) Asíntotas

    c) Crecimiento

    d) Gráfica

70. $y = 2e^x - 3$

71. $y = e^{-x^2}$.

72. $y = \dfrac{x^2}{1-x^2}$

Solución: $y' = \dfrac{2x}{(1-x^2)^2}$

73. $y = \dfrac{3x^2}{1+x^2}$

Solución: $y' = \dfrac{6x}{(1+x^2)^2}$

74. Hallar a para que sea continua la función:

$$f(x) = \begin{cases} 4x + a & si \quad x \leq 3 \\ \dfrac{x^2-3x}{9-x^2} & si \quad 3 < x \end{cases}$$

Solución: $a = -12'5$

75. Hallar la función polinómica de grado 2 que tiene un mínimo en el punto $(2,7)$ y cuyo coeficiente principal es 1

Solución: $a = x^2 - 4x + 11$

76. Hallar el punto de corte con el eje de ordenadas de la recta tangente a la curva $y = 3 - \dfrac{5}{2x+5}$ en el punto $x = -3$. Representar gráficamente.

$y' = \dfrac{10}{(2x+5)^2} P(0, 38)$

Capítulo 11

REGRESIÓN. CORRELACIÓN

11.1. Variables estadísticas bidimensionales

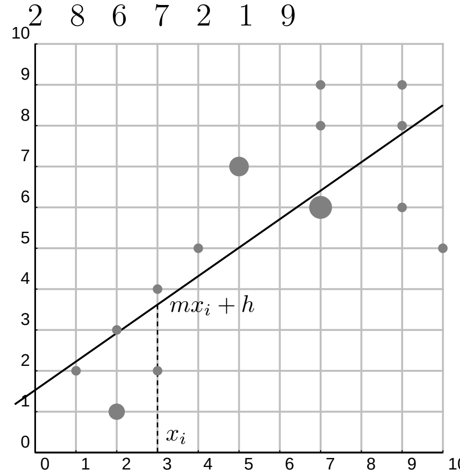
Cuando estudiamos dos variables estadísticas puede interesar ver si están relacionados sus valores, por ejemplo en las calificaciones en dos asignaturas, Física y Matemáticas, de 20 alumnos, cabe esperar que a una nota alta en Física corresponda otra alta en Matemáticas.

Para ello se consideran simultáneamente las dos variables estadísticas, se tiene entonces una **variable estadística bidimensional**.

Consideremos en el ejemplo anterior las calificaciones:

Física: x_i	2	4	5	9	9	10	7	3	2	5	7	9	7	3	7	7	5	1	2	7
Matemáticas: y_i	3	5	7	9	6	5	6	4	1	7	6	8	6	2	8	6	7	2	1	9

Podemos representar en el plano cada pareja de valores, obtenemos así los **diagramas de dispersión** llamados también **nube de puntos**. Estos puntos no se situarán sobre una línea determinada (a diferencia de las funciones, en los que cada valor de una variable determina el valor de la otra), pero cuando hay dependencia entre los valores sí aparece cierta forma en la nube.



Se llama ajuste de la nube de puntos, al problema de encontrar la línea que mejor se adapta a la nube de puntos. Nos limitaremos a encontrar rectas. Una vez halladas nos darán el valor más probable para una de las variables correspondiente a un valor dado de la otra.

Recta de regresión de y sobre x: Es la recta $y = mx + h$, de manera que el error cometido al tomar como valor y_i correspondiente a x_i, el dado por la recta: $y = mx_i + h$ sea mínimo, o sea la recta que hace mínimas las diferencias $y_i - (mx_i + h)$.

m se llama **coeficiente de regresión de y sobre x**

11.2. Cáculo de los parámetros de una variable estadística bidimensional

x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i \cdot y_i$
9	9	81	81	81
7	7	49	49	49
8	7	64	49	56
12	5	144	25	60
$\Sigma x_i = 36$	$\Sigma y_i = 28$	$\Sigma x_i^2 = 338$	$\Sigma y_i^2 = 204$	$\Sigma x_i \cdot y_i = 246$

Media de x: $\bar{x} = \dfrac{\Sigma x_i}{N} = \dfrac{36}{4} = 9$

Varianza de x: $\sigma_x^2 = \dfrac{\Sigma x_i^2}{N} - \bar{x}^2 = \dfrac{338}{4} - 9^2 = 3'5$ Desviación típica de x: $\sigma_x = \sqrt{3'5} = 1'87$

Media de y: $\bar{y} = \dfrac{\Sigma y_i}{N} = \dfrac{28}{4} = 7$

Varianza de y: $\sigma_y^2 = \dfrac{\Sigma y_i^2}{N} - \bar{y}^2 = \dfrac{204}{4} - 7^2 = 2$ Desviación típica de y: $\sigma_y = \sqrt{2} = 1'41$

Covarianza. Se llama **covarianza** a la media de los productos de las desviaciones de las dos componentes de la variable bidimensional, $\boxed{\sigma_{xy} = \dfrac{\Sigma(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{N} = \dfrac{\Sigma x_i \cdot y_i}{N} - \bar{x} \cdot \bar{y}}$

$$\sigma_{xy} = \frac{\Sigma x_i \cdot y_i}{N} - \bar{x} \cdot \bar{y} = \frac{246}{4} - 9 \cdot 7 = -1'5$$

Coeficiente de correlación. Viene dado por la covarianza dividida por el producto de las desviaciones típicas: $\boxed{r = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x . \sigma_y}}$

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x . \sigma_y} = \frac{-1'5}{\sqrt{3'5} \cdot \sqrt{2}} = -0'56$$

Recta de regresión y/x: $\boxed{y - \bar{y} = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} \cdot (x - \bar{x})}$

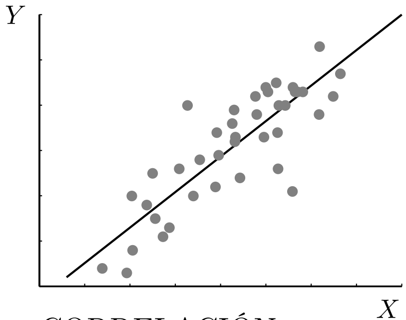
A la pendiente $m = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}$ se le llama **coeficiente de regresión de y/x**

$y - 7 = \dfrac{-1'5}{3'5}(x - 9)$ en la calculadora m es b

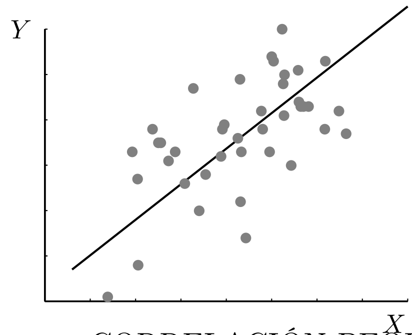
11.3. Correlación

Es el grado de mutua dependencia entre las dos variables estadísticas que componen la variable bidimensional.

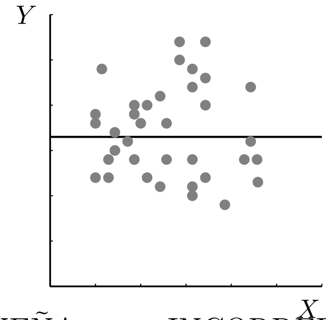
Cuanto mayor es la correlación más estrecha es la banda en la que se sitúan los puntos de la nube.



CORRELACIÓN



CORRELACIÓN PEQUEÑA



INCORRELACIÓN

La correlación se mide por el coeficiente de **correlación lineal** (o de Pearson).

Se tiene que $r \in [-1, 1]$:

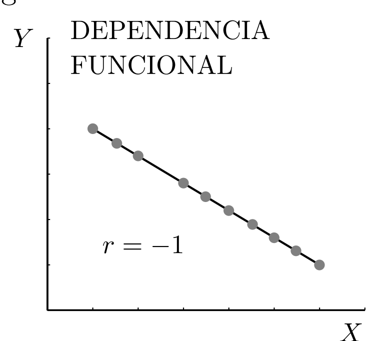
Cuanto más próximo a 1 está $|r|$ mayor es la correlación, más estrecha es la banda en que están los puntos alrededor de la recta de regresión.

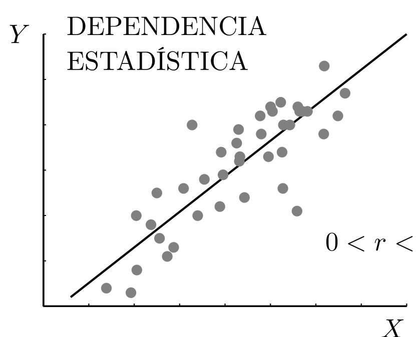
Si $r = \pm 1$ entonces hay dependencia funcional, los puntos están en la recta.

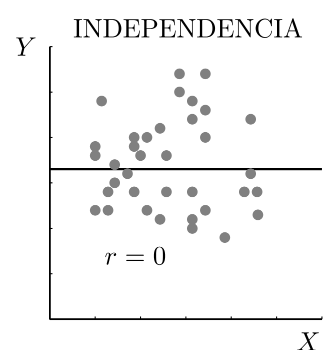
Cuanto más próximo a 0 está r menor es la correlación, más redonda es la nube de puntos. Si es 0 hay independencia lineal.

Si $r > 0$ es correlación positiva la recta es creciente Si $r < 0$ es correlación negativa la recta es decreciente

ejemplo de correlación negativa: puesto de calificación en un campeonato de liga y número de goles marcados.







De todas formas para valorar la correlación hay que tener en cuenta el contexto: así por ejemplo una correlación $r = 0'6$ entre "estaturas" y "pesos" de los soldados de un regimiento es baja; una correlación $r = 0'6$ entre "la nota de matemáticas" y "el número total de horas de estudio a la semana" de los alumnos de una clase es notablemente alta.

11.4. Recta de regresión de y sobre x

Cuando la correlación es suficientemente alta, tiene sentido considerar la recta de regresión de y sobre x "y/x" que pasa por el punto de coordenadas las medias $(\bar{x}, \bar{y})$:

recta de regresión y/x**:** $y - \bar{y} = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}.(x - \bar{x})$

la pendiente es el **coeficiente de regresión de** y **sobre** x y es igual a la covarianza dividida por la varianza de x:

Ejemplo En las notas de Física y Matemáticas de los 20 alumnos.

x_i	2	4	5	9	9	10	7	3	2	5	7	9	7	3	7	7	5	1	2	7
y_i	3	5	7	9	6	5	6	4	1	7	6	8	6	2	8	6	7	2	1	9

Las medias son: $\bar{x} = 5'55, \bar{y} = 5'40$, resulta: $\sigma_{xy} = 4'98$

El coeficiente de correlación lineal de la Física y las Matemáticas, cuyas desviaciones típicas son $\sigma_x = 2'67, \sigma_y = 2'43$, resulta: $r = \dfrac{4'98}{2'67 \cdot 2'43} = 0'76$

La varianza de la Física es: $\sigma_x^2 = 7'15$ resulta:

recta de regresión de y sobre x: $y - 5'4 = \dfrac{4'98}{7'15}(x - 5'55)$

El **valor esperado** de y_0 para un valor dado x_0, obtenido a partir de la recta de regresión y/x es más fiable cuanto mayor sea $|r|$ y más próximo a la media de x esté x_0. En el ejemplo, el valor esperado para una nota de Física de 5 es de: $y - 5'40 = 0'7(5 - 5'55)$; resulta $y = 5'03$, valor de alto grado de fiabilidad.

Ejercicio Dada la variable bidimensional con frecuencias:

x$_i$	2	5	4	7	8
y$_i$	3	6	8	12	14
n$_i$	2	4	8	6	4

Hallar el coeficiente de correlación y el valor esperado para $x = 10$

$r = 0,927, \quad f(10) = 16,95$

$numdat = 24, \Sigma x_i \cdot y_i = 1340, \sigma_{xy} = 5,7289, y/x: \quad y = 1,680x + 0,15$

$\Sigma x_i = 130, \bar{x} = 5,4167, \Sigma x_i^2 = 786, var_x = 3,4094, \sigma_x = 1,850$

$\Sigma y_i = 222, \bar{y} = 9,25, \Sigma y_i^2 = 2322, var_y = 11,1875, \sigma_y = 3,340$

11.5. Problemas

Sin calculadora estadística:

a) Hallar los parámetros de la variable estadística bidimensional:

$(13, 12), (17, 17), (19, 15), (23, 24)$

endtabular

$\bar{x} = 18 \quad \sigma_x^2 = 13 \quad \sigma_x = \sqrt{13} = 3'61$

$\bar{y} = 17 \; \sigma_y^2 = 19'5 \; \sigma_y = \sqrt{19'5} = 4'42$

$\sigma_{xy} = \dfrac{\Sigma x_i \cdot y_i}{N} - \bar{x} \cdot \bar{y} = \dfrac{1282}{4} - 18 \cdot 17 = 14'5$

$r = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x . \sigma_y} = \dfrac{14'5}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{19'5}} = 0'91$

recta y/x: $y - \bar{y} = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} . (x - \bar{x}); \quad y - 17 = \dfrac{14'5}{13}(x - 18)$

b) Hallar los parámetros de la variable estadística bidimensional:

$(4, 12), (12, 16), (20, 20), (24, 28)$

$r = 0'94625 \quad y - 19 = \dfrac{43}{59}(x - 15)$

1. Al aplicar dos tests de memoria a un grupo de alumnos, se han obtenido los siguientes resultados (de uno a diez):

   test I: 3,5,7,4,9,8,7,6,5,3,9,3

   test II: 4,6,8,5,7,7,8,7,6,4,8,5.

   a) Representar el diagrama de dispersión. b) Ajustar aproximadamente una recta a la nube. c) Si un alumno ha obtenido en el test I el resultado 6 qué resultado cabe esperar en el test II.

2. Hacer el problema anterior analíticamente.

   Solución: mediax = 5’75, varx = 4’69, mediay = 6’25, vary=2’02, covar = 2’73, recta y/x : $y - 6'25 = 0'58(x - 5'75)$, $y(6) = 6'3$ en el test II

3. El cambio de la moneda de dos naciones respecto al marco alemán ha sufrido las siguientes fluctuaciones:

   1’3; 2’5; 1’2; 1’1; 0’9;

   1’1; 2’3; 0’9; 1’0; 0’8.

   Indica la dependencia comercial y económica de esas dos naciones.

   Solución: mediax = 1’40, varx = 0’32, mediay = 1’22, vary = 0’30, covar = 0’31, r = 0’99, hay correlación muy grande, al ser positiva indica que crecen a la vez, las economías son complementarias de intensa relación comercial

4. Si en el problema anterior se obtuviera un coeficiente de correlación igual a -0’61 ¿como se interpretaría?

   Solución: Hay correlación negativa, no muy grande pero sí significativa. Al ser negativa indica que las economías están en competición: cuando una crece la otra decrece

5. Las estaturas y pesos, en centímetros y kilogramos respectivamente, de un grupo de 6 personas están dadas por:

est. (cm)	168	174	180	175	158	162
peso (kg)	65	70	73	68	55	62

   i) Hallar la recta de regresión que sirve para predecir la altura conocido el peso y el coeficiente de correlación entre ambas medidas.

   ii) Predecir la etatura de una séptima persona, afín a las anteriores, que pesa 71 kg.

¿Es fiable la predicción?.

Solución: mediax = 65'50, varx = 34'25, mediay = 169'50, vary = 58'58, covar = 43'32, r = 0'97, $y - 169'50 = 1'27(x - 65'50)$, $y(71) = 176'3$. Es fiable porque la correlación es alta y el valor 71 está cerca de la media

6. El puesto de clasificación y los goles marcados en una temporada de liga vienen dados por los pares: (1,75),(2,77),(3,72),(4,63),(5,69),(6,75), (7,62),(8,61),(9,63),(10,47),(11,49),(12,43) (13,51),(14,48),(15,44),(16,57),(17,47), (18,51), (19,47),(20,55),(21,37),(22,53) . Hallar la recta de regresión y el coeficiente de correlación interpretando el resultado. ¿Cuántos goles serían necesarios para quedar 8^0?

   Solución: coef correl -0,797968258 covar -57,40909091

   recta y/x $y = -1,426312818x+73,03896104$ valor esperado f(8)= 61,6284585

7. Dos conjuntos de datos bidimensionales tienen como coeficientes de correlación r_1 = -0'87 y r_2 = 0'37. a) Razonar en cuál de los dos conjuntos es menor el ajuste (mediante una recta) de una variable en términos de la otra. b) Representar dos conjuntos de puntos cuyas correlaciones se correspondan aproximadamente con las dadas.

8. Hallar el coeficiente de correlación y si es adecuado, en la recta de regresión y/x, el valor esperado para x = 10, de la variable bidimensional:

x_i	9	11	14	12
y_i	5	9	12	12

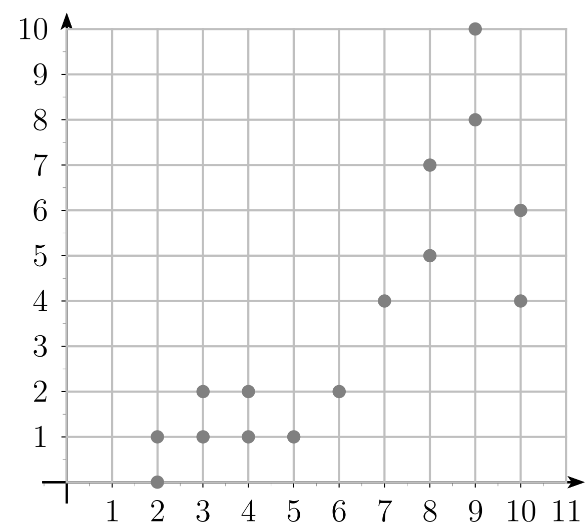
   Dibujar la nube de puntos y la recta de regresión.

   Solución: mediax = 11'5, mediay = 9'5, covar = 4'75, r = 0'9173, $f(10) = 7'3$

9. Hallar el coeficiente de correlación y si es adecuado, en la recta de regresión y/x, el valor esperado para x = 8, en la variable bidimensional de la que se conoce: $\Sigma x_i = 253, \Sigma y_i = 1171, \Sigma(x_i - \bar{x})^2 = 885,5, \Sigma(y_i - \bar{y})^2 = 2829,09, \Sigma(x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y}) = -1263, N = 22$

   Solución: $r = -0,7979, \quad f(8) = 61,62$

10. Hallar el coeficiente de correlación y si es adecuado, en la recta de regresión y/x, el valor esperado para x = 5, en la variable bidimensional de la que se conoce:



   Solución: . covar= 6,8 cocorr= 0,831 $y - 3,6 = 0,864(x - 6)$ $f(5) = 2,735$

11. Hallar el coeficiente de correlación y si es adecuado, en la recta de regresión y/x, el valor esperado para x = 8, de la variable bidimensional:

x_i	10	8	7	7	6	7	5
y_i	10	7'5	8	10	8	7'5	5'25

   Solución:

   destpx= 1,456862718 destpy= 1,514386789

   covar= 1,566326531

   cocorr= 0,709948526

$y - 8,035714286 = 0,737980769(x - 7,142857143)$

$f(8) = 8,668269231$

12. Las tasas brutas de natalidad y mortalidad por cada mil habitantes, durante el año 1983, de algunos países de Europa eran las siguientes:

	T. nat.	T. mort.
R. D. Alemana	14	13
Checoslovaquia	15	12
Dinamarca	11	10
España	13	7
Francia	14	10
Grecia	14	9
Holanda	12	8
Irlanda	20	9
Italia	11	10
Noruega	12	10
Portugal	15	9
Reino Unido	13	12

Estudiar la variable bidimensional que resulta.

Solución: mediax = 13'67, varx = 5'39, mediay = 9'92, vary = 2'74, covar = -0'106, recta y/x : $y - 9'92 = -0'01(x - 13'67)$, $r = -0'01$

13. Las notas de Matemáticas y de Física de un grupo de alumnos están dadas por los pares (3,4) (7,6) (5,3) (5,4) (8,7) (7,5) (2,3) (2,2) (8,6). Hallar las rectas de regresión y el coeficiente de correlación entre ambas notas interpretando el resultado.

Solución: mediax = 5'22, varx = 5'28, mediay = 4'44, vary = 2'47, covar = 3'23, recta y/x : $y - 4'44 = 0'61(x - 5'22)$, r = 0'90

14. Dada la variable bidimensional:

x_i	2	5	4	7	8
y_i	3	6	7	9	8
n_i	2	5	6	7	4

Hallar el coeficiente de correlación y el valor esperado para $x = 10$

$r = 0,833, \quad f(10) = 10,59$

$numdat = 24, \Sigma(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 61,09356664, \sigma_{xy} = 2,5456, y/x: \quad y = 0,765x + 2,94$

$\Sigma x_i = 134, \bar{x} = 5,5833, \Sigma(x_i - \bar{x})^2 = 79,8423, var_x = 3,3268, \sigma_x = 1,820$

$\Sigma y_i = 173, \bar{y} = 7,2083, \Sigma(y_i - \bar{y})^2 = 67,9699, var_y = 2,8321, \sigma_y = 1,680$